Kapitel 3 A-priori Fehlerabschätzungen in anderen Normen

bisher: $\|u-u_T\|_{H^1} \leq C\, h(T)\, \|f\|_{\mathbb{L}^2}$

höhere Konvergenzordnung

Ziel: $\|u-u_T\|_{\boxed{\mathbb{L}^2}} \leq \tilde{C}\, h(T)^{\boxed{2}}\, \|f\|_{\mathbb{L}^2}$

schwächere Norm

abstrakte Betrachtung

(A) finde $u \in V$, so dass $\forall v \in V: a(u,v) = b(v)$ LM-Vor. erfüllt

(N) finde $u_T \in V_T$, so dass $\forall v_T \in V_T: a(u_T, v_T) = b(v_T)$ $V_T \subset V$, $\dim V_T < \infty$

schwächerer Raum: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ mit $V \subset H$ und $\|w\|_H \leq C\|w\|_V$

Satz 3.1 (Aubin-Nitsche-Lemma) Für die Lösungen von (A) und (N) gilt

$$\|u-u_T\|_H \leq C\, \|u-u_T\|_V \sup_{g \in H \setminus \{0\}} \frac{1}{\|g\|_H} \operatorname{dist}_V(u_g, V_T)$$

Problem mit adjungiertem Operator

wobei u_g Lösung ist von (A') finde $u_g \in V$: $\forall \varphi \in V$: $a(\varphi, u_g) = \langle g, \varphi \rangle_H$

Beweis: nutzt $\|w\|_H = \sup\limits_{g \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle g, w\rangle_H}{\|g\|_H}$

dann $\|u - u_T\|_H = \sup\limits_{\|g\|_H > 0} \frac{\langle g, u - u_T\rangle_H}{\|g\|_H} = \sup\limits_{\|g\|_H > 0} \frac{a(u - u_T, u_g)}{\|g\|_H}$

$$\overset{(GO)}{=} \sup_{\|g\|_H > 0} \frac{a(u - u_T, u_g - w_T)}{\|g\|_H} \underset{\substack{\uparrow \\ a \text{ stetig auf } V \times V}}{\leq} C \|u - u_T\|_V \sup_{\|g\|_H > 0} \frac{1}{\|g\|_H} \|u_g - w_T\|_V$$

mit inf über alle $w_T \in V_T$ folgt Beh. ▨

Korollar 3.2: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.15 und Korollar 2.13 gilt

$$\|u - u_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C h_n^2 \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

Beweis: $V = H_0^1(\Omega)$, $H = \mathbb{L}^2(\Omega)$

$$\operatorname{dist}_V(u_g, V_T) \leq \|u_g - I_T(u_g)\|_V \overset{\text{Satz 2.12}}{\leq} C\, h(T)\, |u_g|_{H^2(\Omega)} \overset{\text{Regularitätssatz}}{\leq} \tilde{C}\, h(T)\, \|g\|_{\mathbb{L}^2}$$

also $\|u-u_n\|_{\mathbb{L}^2} \leq C \|u-u_n\|_{H^1} \sup\limits_{\|g\|_{\mathbb{L}^2}>0} \left(\frac{1}{\|g\|_{\mathbb{L}^2}} \tilde{C} h_n \|g\|_{\mathbb{L}^2} \right)$

Korollar 2.13 $\leq \tilde{C} C h_n^2 \|u\|_{H^2} \leq \tilde{C} C h_n^2 \|f\|_{\mathbb{L}^2}$ ▨

↖ Regularitätssatz

Andre Technik: nutze Normäquivalenz auf T_{ref} ...

Beispiel: $\|w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C \|w\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}$ gilt immer auf beschränkten Gebieten

aber Achtung: $w(x) = \begin{cases} |x|^{-1/4} & x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist in $\mathbb{L}^2(\Omega) \setminus \mathbb{L}^\infty(\Omega)$, $\Omega = (-1,1)$

d.h. $\|w\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \leq C \|w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ kann nicht für alle $w \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ gelten

wohl aber in V_T: $\|w\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \max\limits_{P \in T.cells} \|w\|_{\mathbb{L}^\infty(P)} \leq \max\limits_{P \in T.cells} \|w \circ A_P\|_{\mathbb{L}^\infty(T_{ref})} \leq C \max\limits_{P \in T.cells} \|w \circ A_P\|_{\mathbb{L}^2(T_{ref})}$

↗ P - unabh. Äquivalenzkonstante auf T_{ref}

Trafosatz $\leq C \tilde{C} \underbrace{\max\limits_{P \in T.cells} |\det B_P|^{-1}}_{\text{Abschätzung ?}} \underbrace{\|w\|_{\mathbb{L}^2(P)}}_{\leq \|w\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}$

Lemma 3.3 Sei (T_n) eine quasiuniforme Familie von Triangulierungen. Dann gibt es $C>0$ so dass $\|B_p^{(n)}\| \, |\det B_p^{(n)}|^{-\frac{1}{2}} \leq C$ für alle $P \in T_n$.cells.

Beweis

wegen $\|B_p\| \, \|B_p^{-1}\| \leq K(T)$

gilt für $M_p = \frac{B_p}{\|B_p\|}$ $\|M_p\| \leq 1$ und $\|M_p^{-1}\| = \|B_p\| \, \|B_p^{-1}\| \leq K(T)$

außerdem ist $K = \{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid M \text{ invertierbar}, \|M\| \leq 1, \|M^{-1}\| \leq K(T) \}$

kompakt: beschränkt ✓ abgeschlossen: Sei $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ $\lim M_k = N$

Da $\|M_k^{-1}\| \leq K(T)$ existiert konvergente TF $M_{k_\ell}^{-1} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} D$

$I = M_{k_\ell} M_{k_\ell}^{-1} \longrightarrow ND$ damit N invertierbar, $D = N^{-1}$

$\|N\| = \lim \|M_k\| \leq 1$, $\|N^{-1}\| = \lim \|M_{k_\ell}^{-1}\| \leq K(T)$ d.h. $\lim M_k \in K$ ✓

damit ist $0 < \underbrace{\min_K |\det|}_{} \leq |\det M| \leq \max_K |\det|$

hängt von $K(T)$ ab ... wähle K zu $\sup K(T_n)$

dann $\|B_p^{(n)}\| \, |\det B_p^{(n)}|^{-\frac{1}{2}} = \left| \det \frac{B_p^{(n)}}{\|B_p^{(n)}\|} \right|^{-\frac{1}{2}} \leq \left(\min_K |\det| \right)^{-\frac{1}{2}} =: C$ ▨

also in V_T $$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \le \hat{C} \underbrace{\max_{P\in T.\text{cells}} \|B_p\|^{-1}}_{\text{wegen } \|B_p\| \le h(T)} \underbrace{\|B_p\| \, |\det B_p|^{-\frac{1}{2}}}_{\text{glm abschätzbar bei quasiuniformen Triangulierungsfolgen}} \|w\|_{L^2}$$

ist $\max \|B_p\|^{-1} \ge \frac{1}{h(T)}$

noch nutzbare Richtung $\max \|B_p\|^{-1} \le \frac{C}{h(T)}$ hat man bei uniformen Folgen

Definition 3.4 In der Situation von Definition 2.9 führen wir zusätzlich ein

$$h_{min}(T) = \min_{P\in T.\text{cells}} \|B_p\|$$

und nennen eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Triangulierungen uniform wenn sie quasiuniform ist und ein C existiert mit

$$h(T_n) \le C \, h_{min}(T_n)$$

damit: $$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \le \bar{C} \frac{1}{h_{min}(T)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für } w\in V_T$$

Damit kann man eine $\mathbb{L}^\infty$- Konvergenzabschätzung zeigen:

Satz 3.5 Unter den Voraussetzungen von Korollar 3.2 mit einer uniformen Triangulierungsfolge gilt

$$\|u-u_n\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \le C h_n \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

Beweis:

$$\|u-u_T\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} \le \underbrace{\|u-I_T(u)\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}}_{= \max\limits_{P\in T,\text{ cells}} \underbrace{\|E_{ref}(u\circ A)\|_{\mathbb{L}^\infty(T_{ref})}}} + \underbrace{\|\underbrace{I_T(u)-u_T}_{\in V_T}\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)}}_{\le C_1 \frac{1}{h_{min}(T)} \|I_T(u)-u_T\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}$$

Sobolev Einbettung $\le C_2 \|E_{ref}(u\circ A)\|_{H^2(T_{ref})}$

Bramble Hilbert $\le C_3 |u\circ A|_{H^2(T_{ref})}$

Trafosatz $\le C_4 \|B_P\|^2 |\det B_P^{-1}| \, |u|_{H^2(P)}$

Lemma 3.3 $\le C_5 h(T) |u|_{H^2(\Omega)}$

Regularitätssatz $\le C_6 h(T) \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$

unif. Triang. $\le C_2 \frac{1}{h(T)} \left(\|u-I_T(u)\|_{\mathbb{L}^2} + \|u-u_T\|_{\mathbb{L}^2} \right)$

$\le C_3 \frac{1}{h(T)} \left(h(T)^2 |u|_{H^2} + h(T)^2 \|f\|_{\mathbb{L}^2} \right)$

Interpolationsabschätzung Satz 2.10 + Korollar 3.2

$\le C_4 h(T) \|f\|_{\mathbb{L}^2}$

Regularitätssatz

▨