Ähnliche Argumente liefern sog <u>inverse Abschätzungen</u>

Lemma 3.6 Sei T ein Polytop, Π ein von Polynomen erzeugter Unterraum von $C^\infty(\overline{T})$ mit $\dim \Pi < \infty$. Dann gilt für $0 \le m \le t$ und jedes $v \in \Pi$

$$|v|_{H^t(T)} \le C\, |v|_{H^m(T)}$$

mit einer Konstante C, die nicht von v abhängt.

Beweis: $v \mapsto |v|_{H^m}$ ist Seminorm auf Π

wenn $|v|_{H^m} = 0$ dann $v \in P_{m-1}$

wähle P_{m-1} - Referenzpunkte x_e^{ref} und bilde zugehörigen Interpolationsoperator I

dann ist $|||v|||_m := |v|_{H^m} + \|Iv\|_\infty$ Norm auf Π

denn $|||v|||_m = 0 \Rightarrow v \in P_{m-1} \Rightarrow Iv = v \Rightarrow \|v\|_\infty = 0 \Rightarrow v = 0$

Wegen Normäquivalenz $\|v\|_{H^t} \le C\, |||v|||_m$

$$|v|_{H^t} = |v - \underbrace{Iv}_{\substack{\nabla^\alpha Iv = 0 \\ \text{für } |\alpha| \ge m}}|_{H^t} \le \|v - Iv\|_{H^t} \le C\, |||v - Iv|||_m = C\, |v - Iv|_{H^m} + \underbrace{\|I(v - Iv)\|_\infty}_{= 0}$$

$\boxtimes$

Zusammen mit dem Trafosatz ergibt sich

Satz 3.7 Sei (T_n) eine uniforme Folge von Triangulierungen und sei v Element eines Raums V_n gebildet aus T_n und P_{k-1} Dreieckselementen. Ist $0 \le m \le t$ dann existiert eine n, v-unabhängige Konstante c, sodass

$$\| v \|_{t, T_n} \le c\, h(T_n)^{m-t} \| v \|_{m, T_n}$$

Beweis 2 × Trafosatz liefert für $P \in T_n$

$$|v|_{H^t(P)} \le C \underbrace{\left(\|B_p\| \, \|B_p^{-1}\| \right)^t}_{\le \sup K(T_n) < \infty} \underbrace{\|B_p\|^{m-t}}_{\le h_{min}(T)^{m-t} \underset{\text{unif}}{\le} C\, h(T)^{m-t} \text{ für } m \le t} |v|_{H^m(P)}$$

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}
|v|_{H^t(P)} &\le C_0\, h(T)^{m-t} |v|_{H^m(P)} \\
|v|_{H^{t-1}(P)} &\le C_1\, h(T)^{m-t} |v|_{H^{m-1}(P)} \\
&\vdots \\
|v|_{H^{t-m}(P)} &\le C_m\, h(T)^{-(t-m)} \|v\|_{L^2(P)} \\
&\vdots \\
|v|_{H^k} &\le C_{t-k}\, h(T)^{-k} \|v\|_{L^2} \le C\, h(T)^{m-t} \|v\|_{L^2}
\end{aligned}\right\} \|v\|_{H^t(P)} \le \tilde{C}\, h(T)^{m-t} \|v\|_{H^m}$$

□