Kapitel 4 Nichtkonforme Methoden

konforme FE: $V_T \subseteq V$ ← Raum in dem Variationsproblem $a(u,v) = b(v)$ gestellt ist

$a(u_T, v_T) = b(v_T)$ benutzt exakte Bilinearform

das kann nicht immer eingehalten werden

- krummlinige Ränder ... exakte Erfüllung von 0-Randbedingung nicht möglich $\rightsquigarrow V_T \not\subseteq V$
- a hat Gewichtsfunktion α ... inexakte Integration ... $a_T \neq a$
- Gleichungen 4ter Ordnung ... C^1-Regularität führt zu vielen Freiheitsgraden ... große Matrizen ... effizienter $V_T \not\subseteq V$

Wir beginnen mit abstrakten Hilfssätzen zur Verallgemeinerung des Céa Lemmas

(A) Finde $u \in V \subset H^m(\Omega)$: $\forall v \in V$: $a(u,v) = b(v)$

(N) Finde $u_T \in V_T$: $\forall v_T \in V_T$: $a_T(u_T, v_T) = b_T(v_T)$

Zusatzvoraussetzung: T ist einer Familie $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entnommen

glm. Anforderungen an T-Abhängigkeit beziehen sich auf diese Familie

Lemma 4.1. Sei $V_T \subset V$ und a_T gleichgradig elliptisch, d.h. es gibt ein $\alpha > 0$ so dass $a_T(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^m(\Omega)}$ für alle $v \in V_T$ gilt. Dann gibt es eine glm Konstante C so dass

$$\|u - u_T\|_{H^m} \leq C \left(\inf_{v_T \in V_T} \left\{ \|u - v_T\|_{H^m} + \sup_{w_T \in V_T} \frac{|a(v_T, w_T) - a_T(v_T, w_T)|}{\|w_T\|_{H^m}} \right\} + \sup_{w_T \in V_T} \frac{|b(w_T) - b_T(w_T)|}{\|w_T\|_{H^m}} \right)$$

Bem: a_T darf Operationen enthalten, die für $v \in V$ gar nicht definiert sind (etwa Punktauswertungen für Quadraturformeln)

Beweis: $v_T \in V_T$, $u_T - v_T =: w_T$

$$\alpha \| u_T - v_T \|^2 \leq a_T(u_T - v_T, w_T)$$

$$= a(u - v_T, w_T) + [a(v_T, w_T) - a_T(v_T, w_T)] + \underbrace{[a_T(u_T, w_T) - a(u, w_T)]}_{= -(b(w_T) - b_T(w_T))}$$

Division durch $\alpha \| w_T \|$

Stetigkeit von a

$$\| u_T - v_T \| \leq C \left(\| u - v_T \| + \frac{| a(v_T, w_T) - a_T(v_T, w_T) |}{\| w_T \|} + \frac{| b(w_T) - b_T(w_T) |}{\| w_T \|} \right)$$

Da v_T beliebig folgt Beh. mit

$$\| u - u_T \| \leq \| u - v_T \| + \| u_T - v_T \| \qquad \boxtimes$$

Interpretation: Zum reinen Approximationsfehler $\mathrm{dist}(u, V_T)$ kommen nun noch Approximationsfehler von a, b auf V_T hinzu

Beispiel: Quadraturfehler in b

Situation: $\mathcal{T}$ homogene Triangulierung

Referenzzelle T_{ref}

Lebesguemaß

Punktmaßapproximation von $\mathbb{1}_{T_{ref}} \lambda$: Q_{ref}

Exaktheitsgrad $m-1$ d.h. $\int P \, Q_{ref} = \int_{T_{ref}} P \lambda$ für $P \in \mathcal{P}_{m-1}$

f stückweise C^m auf Triangulierungszellen mit $\| \nabla^\gamma f \|_{\infty, T} \leq C$ glm für alle $|\gamma| \leq m$

zunächst gilt für $g \in H^m(\overline{T}_{ref})$:

$$\underbrace{\left| \int g \, Q_{ref} - \int_{T_{ref}} g \lambda \right|}_{} \leq C \, |g|_{H^m(T_{ref})}$$

denn $E(g) :=$ ist ein linearer, beschränkter Operator auf $H^m(T_{ref})$ für $m \geq 2$

weiter zeigt man für $g = u \cdot v$ mit allgemeiner Produktregel

$$|g|_{H^m(T_{ref})} \leq C \sum_{k=0}^{m} |v|_{H^k} \, |u|_{W^{m-k,\infty}}$$

und für $u = f \circ A$ mit A affin linear (wie im Trafosatz)

$$|u|_{W^{m-k,\infty}} \leq C \, \|B\|^{m-k}$$

mit $\displaystyle b_T(w_T) := \sum_{P \in T.\text{cells}} \int |\det B_P| \; f \circ A_P \; w_T \circ A_P \; Q_{ref}$

und $\displaystyle b(w_T) = \sum_{P \in T.\text{cells}} \int_{T_{ref}} |\det B_P| \; f \circ A_P \; w_T \circ A_P \; \lambda$

ist $\displaystyle |b(w_T) - b_T(w_T)| \leq \sum_{P \in T.\text{cells}} C \, |\det B_P| \sum_{k=0}^{m} \|B_P\|^{m-k} \, |w_T \circ A_P|_{H^k(T_{ref})}$

$$\leq \sum_{P \in T.\text{cells}} C \, \|B_P\|^{m} \, \|w_T\|_{H^m(P)}$$

$$\text{C.S} \quad \leq C \Big(\sum_{P \in T.\text{cells}} \|B_P\|^{2m} \Big)^{\frac{1}{2}} \|w_T\|_{H^m(\Omega)}$$

Wegen $\displaystyle \lambda^d(\Omega) = \sum_{P \in T.\text{cells}} \int_P 1 \, \lambda = \sum_{P \in T.\text{cells}} |\det B_P| \, \lambda^d(T_{ref})$ ist $\displaystyle \sum |\det B_P| = \frac{\lambda^d(\Omega)}{\lambda^d(T_{ref})}$

und $\displaystyle \sum |\det B_P| = \sum \Big|\det \frac{B_P}{\|B_P\|}\Big| \, \|B_P\|^2 \overset{\text{quasiunif.}}{\geq} C \sum \|B_P\|^2$ ist $\displaystyle \sum \|B_P\|^2 \leq C$

also: $\quad |b(w_T) - b_T(w_T)| \leq C\, h(T)^{m-1}\, \|w_T\|_{H^m}$

Nachteil dieser Abschätzung:
- keine Kleinheit bei $m=1$
- Möglichkeit besserer Integration wird nicht ausgenutzt

Genaue Fehlerabschätzung bei mehr $\underbrace{\text{stückweiser Regularität}}$ und höherer Exaktheit

beachte: f kann Sprünge haben
aber nur an Zellgrenzen
(muss beim Triangulieren beachtet werden:
Datensprünge auf Zellkanten)

Exaktheit: $q \geq m-1 \leadsto P_q \subset \ker E$

Regularität: $l \geq m$

Grad der Testfunktion: $t-1 \qquad t \geq 2$ (wie bisher)

$$|E(uv)| = |E(\underbrace{(u-P)}_{\text{Grad } r-1}v)| \quad \text{wenn} \quad r-1+t-1 \leq q$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{m} |v|_{H^k}\, |u-P|_{W^{m-k,\infty}}$$

noch frei wählbar, z.B. Taylorpolynom

Lagrange Restglied

Satz von Taylor $\quad |u-P|_{L^\infty} \leq C\,|u|_{W^{r,\infty}}$

wenn $r-1 \leq l-1$

bzw für $|\beta| \leq r-1 \quad |\nabla^\beta u - \nabla^\beta P|_{L^\infty} \leq C\,|\nabla^\beta u|_{W^{r-|\beta|,\infty}} \leq \tilde{C}\,|u|_{W^{r,\infty}}$

nutze Ableitung des TP zu u ist TP zur Ableitung von u

und für $|\beta| \geq r \quad |\nabla^\beta (u-P)|_{L^\infty} = |\nabla^\beta u|_{L^\infty} \leq |u|_{W^{|\beta|,\infty}}$

insgesamt: $\quad |u-P|_{W^{m-k,\infty}} \leq C\,|u|_{W^{\max(r,m-k),\infty}} \leq C\,\|B_p\|^{\max(r,m-k)}$

wenn $u = f\circ A_p$

optimale Ausnutzung bei $\quad r := \min(l,\ q+t-2)$

Ergibt $\quad |b(w_T) - b_T(w_T)| \leq C\,h(T)^{\max(r,m)-1}\,\|w_T\|_{H^m(\Omega)}$

Beispiel: $l=\infty$, $t=2 \rightsquigarrow r=q \quad$ Forderung $q-1 \geq 1$ dh $\underline{\underline{q \geq 2}}$

lineare FEM

Beispiel: Quadraturfehler in a

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \alpha_{ij}(x)\, \partial_i u(x)\, \partial_j v(x)\, dx \quad \text{mit} \quad \sum_{i,j=1}^{d} \alpha_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \alpha_{min} \|\xi\|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

und V so, dass $|u|_{H^1}^2 \geq C \|u\|_{H^1}^2$

pos.

$\leadsto$ dann a elliptisch

gleiches Problem ... numerische Integration

$$a_T(u,v) = \sum_{i,j=1}^{2} \int \alpha_{ij}(x)\, \partial_i u(x)\, \partial_j v(x)\, Q_T(dx)$$

stückweise C^ℓ

Exaktheitsgrad q

Grundsätzliche Frage: bleibt Elliptizität $a_T(u_T, u_T) \geq C \|u_T\|_{H^1}^2$ erhalten

$$a_T(u,u) = \int \langle \alpha \nabla u, \nabla u \rangle\, Q_T(dx) \geq \alpha_{min} \int \|\nabla u\|^2\, Q_T(dx) = \alpha_{min} \sum_{P \in T.\text{alls}} |\det B_P| \int \|\nabla u \circ A_P\|^2\, Q_{ref}$$

falls Gewichte von Q_T nichtnegativ!

wegen $\partial_j (u \circ A_P) = \sum_{i=1}^{d} (\partial_i u) \circ A_P\, (B_P)_{ij} = (B_P^T (\nabla u) \circ A_P)_j \quad \leadsto \quad \nabla u \circ A_P = B_P^{-T} \nabla (u \circ A_P)$

außerdem $\|y\| = \|B_P^T B_P^{-T} y\| \leq \|B_P^T\| \|B_P^{-T} y\| \leq C \|B_P\| \|B_P^{-T} y\|$

$B \mapsto \|B^T\|$ ist Matrixnorm ... damit äquivalent damit: $\| \nabla u \circ A_p \|^2 = \| B_p^{-T} \nabla (u \circ A_p) \|^2 \geq \frac{1}{C \|B_p\|^2} \| \nabla (u \circ A_p) \|^2$

und daher: $a_T(u,u) \geq \frac{\alpha_{min}}{C} \sum_{P \in T\text{-cells}} \|B_p\|^{-2} |\det B_p| \int \| \nabla (u \circ A_p) \|^2 Q_{ref}$

wichtige Beobachtung: $g \longmapsto \left(\int \|g\|^2 Q_{ref} \right)^{\frac{1}{2}}$ ist Seminorm auf $\nabla \Pi_{ref} = \{ \nabla w \mid w \in \Pi_{ref} \}$

Definition 4.2 Sei $\Pi_{ref} \subset C^1(\overline{T}_{ref})$ und Q_{ref} ein Punktmaß auf $\overline{T}_{ref}$.
Dann heißt Q_{ref} zulässig für Π_{ref}, wenn die Integrationsgewichte positiv sind
und $g \mapsto \left(\int \|g\|^2 Q_{ref} \right)^{\frac{1}{2}}$ eine Norm auf $\nabla \Pi_{ref}$ darstellt

Lemma 4.3 Sei $\Pi_{ref} \subset P_{t-1}$ und Q_{ref} habe Exaktheitsgrad $2t-4$ mit positiven Gewichten.
Dann ist Q_{ref} zulässig für Π_{ref}

Beweis: $\nabla P_{ref} \subset P_{t-2}$; für $g \in P_{t-2}$ ist $\|g\|^2 \in P_{2t-4}$ d.h. $\int \|g\|^2 Q_{ref} \overset{\text{Exaktheit}}{=} \underbrace{\int_{T_{ref}} \|g\|^2 dx}_{\text{liefert Norm auf } \nabla \Pi_{ref}}$

$\boxtimes$

beachte: Exaktheit ist hinreichend aber nicht notwendig für Normeigenschaft.

allgemein gilt aber für zulässige Q_{ref} wegen Normäquivalenz

$$\int \|g\|^2 Q_{ref} \geq \underset{>0}{C} \int_{T_{ref}} \|g\|^2 \, dy$$

also $\int \|\nabla(u \circ A_P)\|^2 Q_{ref} \geq C \, |u \circ A_P|_{H^1(T_{ref})}$

Trafosatz $|u|_{H^1(P)} = |u \circ A_P \circ A_P^{-1}|_{H^1(P)} \leq C \, |\det B_P^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \|B_P^{-1}\| \, |u \circ A_P|_{H^1(T_{ref})}$

so dass $a_T(u,u) \geq C \sum_{P \in T.\text{ells}} \underbrace{\|B_P\|^{-2} \|B_P^{-1}\|^{-2}}_{\geq \frac{1}{\kappa(T)^2}} \underbrace{|\det B_P^{-1}| \, |\det B_P|}_{1} \, |u|^2_{H^1(P)} \geq \underset{\text{pos.}}{C} |u|^2_{H^1(\Omega)} \geq \underset{\text{pos.}}{C} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$

Satz 4.4: Sei $a(u,v) = \int_\Omega \langle \alpha \nabla u, \nabla v \rangle \, dx$ mit $0 < \alpha_{min} \leq \alpha(x) \leq \alpha_{max} < \infty$ gegeben auf $V \subset H^1(\Omega)$ und $|v|_{H^1(\Omega)} \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $v \in V$ mit einem $C > 0$.
Ist Q_{Tref} zulässig für T_{ref} und ist $V_T \subset V$ basierend auf einer homogenen Triangulierung T dann ist $a_T(u,v) = \int \langle \alpha \nabla u, \nabla v \rangle Q_T$ V_T-elliptisch

Lösbarkeit damit klar – was ist mit Genauigkeit?

$$g = \langle \alpha \nabla \eta, \nabla \varphi \rangle \circ A_P = \sum \underbrace{\alpha_{ij} \circ A_P}_{u} \underbrace{(\partial_j \eta \, \partial_i \varphi) \circ A_P}_{v} \quad v: \text{grad } 2t-4 \text{ wenn } \eta, \varphi \in P_{t-1}$$

$r-1+2t-4 \leq q$ Bramble Hilbert $q \geq 0$

$$|E(uv)| = |E((u-P)v)| \leq C \, |(u-P)v|_{H^1} \leq C \left(|u-P|_{W^{1,\infty}} \|v\|_{L^2} + |u-P|_{L^\infty} |v|_{H^1} \right)$$

$$\text{Normäquivalenz} \leq C \left(|u-P|_{W^{1,\infty}} + |u-P|_{L^\infty} \right) \|v\|_{L^1}$$

$$\text{C.S} \leq C \, h(T)^r \|\partial_j \eta \circ A_P\|_{L^2} \|\partial_i \varphi \circ A_P\|_{L^2} \qquad \ell \geq r \geq 2$$

$$\rightsquigarrow \quad |a_T(\eta, \varphi) - a(\eta, \varphi)| \leq C \sum_{P \in T, \text{ cells}} h(T)^r |\eta|_{H^1(P)} |\varphi|_{H^1(P)}$$

$$\text{C.S} \leq C \, h(T)^r |\eta|_{H^1(\Omega)} |\varphi|_{H^1(\Omega)}$$

mit $r = \min(\ell, q-2t+5)$ $\quad \ell \geq 2$, $q \geq 0$

Verzichtet man auf $V_T \subset V$

kann man nicht mehr davon ausgehen, dass $\| u_T \|_{H^m}$ definiert ist

... benutze dann gitterbasierte Norm $\| u_T \|_{m,T}$

außerdem benötigt: $a_T(u,u) \geq \alpha \| u \|_{m,T}^2 \quad u \in V_T$

$|a_T(u,v)| \leq C \| u \|_{m,T} \| v \|_{m,T} \quad \underline{\underline{u \in V + V_T}}, \; v \in V_T$

$|b_T(v)| \leq C \| v \|_{m,T}$

mit glm Konstanten $\alpha > 0, C$

Lemma 4.5 Unter den obigen Voraussetzungen gilt

$$\| u - u_T \|_{m,T} \leq C \Bigg(\underbrace{\inf_{v_T \in V_T} \| u - v_T \|_{m,T}}_{\text{Approximationsfehler}} + \underbrace{\sup_{w_T \in V_T} \frac{|a_T(u, w_T) - b_T(w_T)|}{\| w_T \|_{m,T}}}_{\text{Konsistenzfehler}} \Bigg)$$

Beweis: $\alpha \| u_T - v_T \|^2 \leq a_T(u_T - v_T, u_T - v_T) = a_T(u - v_T, u - v_T) + b_T(\underbrace{u_T - v_T}_{=: w_T}) - a_T(u, \underbrace{u_T - v_T}_{= w_T})$

Division durch $\| w_T \|$

$$\| u_T - v_T \| \leq \frac{1}{\alpha} \left(C \| u - v_T \| + \frac{|a_T(u, w_T) - b_T(w_T)|}{\| w_T \|} \right)$$

+ Dreiecksungleichung $\| u - u_T \| \leq \| u - v_T \| + \| u_T - v_T \|$ $\boxtimes$