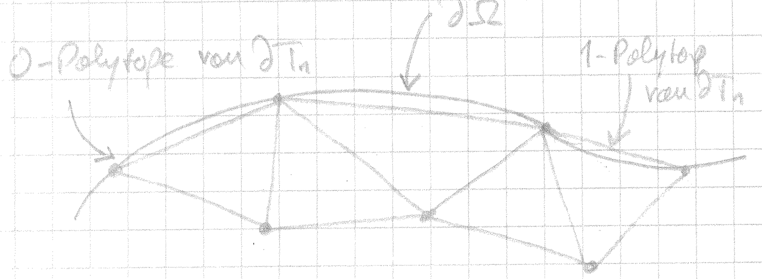
Beispiel: Approximation von Problemen mit Dirichlet-Bedingung auf C^2-Rändern durch P_1-Elemente



Änderung der Annahmen an die Triangulierungsfolge:

- $\Omega(T_n) = \Omega$ wird fallen gelassen
- 0-Polytope von ∂T_n müssen auf $\partial\Omega$ liegen
- zu jedem 1-Polytop K von ∂T_n gibt es eine C^2-Funktion $g_K : [0,|K|] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\partial\Omega = \{ P_K(t) + g_K(t) n_K \mid t \in [0,|K|],\ K \in \dim^{-1}_{|\partial T_n}(1) \}$$

äußere Normale auf K

$$P_K(t) = a_K + t(b_K - a_K)/\|b_K - a_K\|$$

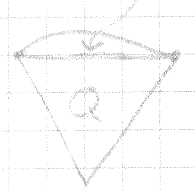
$|K|$

Endpunkte des Segments K

- Die zweiten Ableitungen $\|g_K''\|_\infty$ sind gleichmäßig beschränkt
- $K(T_n)$ ist gleichmäßig beschränkt

wir interpretieren $V_{T,0}$ als Teilraum von $H^1(\Omega)$

durch • Fortsetzung mit linearer Funktion von Q zu den Punkten $P_K(t) + y\, n_K$ mit $0 \le y < g_K(t)$



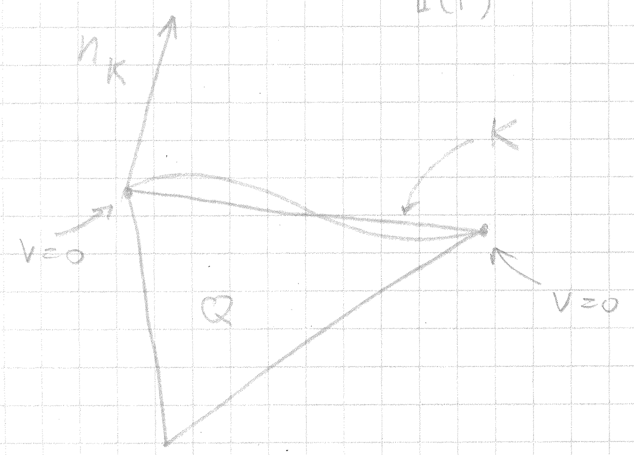
- anschließender Einschränkung auf Ω
- Restriktion $v(x) = 0$ für x: 0-Polytope von ∂T

Nichtkonformität folgt wegen $V_{T,0} \not\subset H^1_0$ (Verletzung der Nullrandbedingung)

Lemma 4.5 Sei T Element einer quasiuniformen Folge von Triangulierungen eines C^2-Gebiets Ω. Dann gilt für jedes $v \in V_{1,0}$

$$\|v\|_{L^2(T)} \leq c\, h(T)^{3/2}\, |v|_{H^1(\Omega)}$$

Beweis:



wegen $v=0$ auf K + Linearität ist $v(P_K(t) + y n_K) = my$ auf Q für ein $m \in \mathbb{R}$

also $\|\nabla v\| = |m|$ und

$$\int_Q \|\nabla v\|^2 dx \geq |m|^2 |\det B_Q|\,|T_{ref}|$$

wegen $g_K(0) = g_K(|K|) = 0$

ist $g_K'(\xi) = 0$

und $|g_K(t)| = |g_K(t) - g_K(0)| \leq \int_0^t |g_K'(s)| ds = \int_0^t |g_K'(s) - g_K'(\xi)| ds$

$$\leq \int_0^t \int_{\min(s,\xi)}^{\max(s,\xi)} |g_K''(\sigma)|\, d\sigma\, ds \leq c\,|K|^2 \qquad \text{auch: } |g_K'(t)| \leq c\,|K|$$

da $|K|^2 \in \{\|B_q e_1\|^2, \|B_q e_2\|^2, \|B_q(e_2 - e_1)\|^2\} \leq 2\|B_q\|^2$

folgt $\quad |g_K(t)| \leq 2c\|B_q\|^2 \quad$ also $\quad |v(P_K(t) + g_K(t)\, n_K)| \leq 2c\,|m|\,\|B_Q\|^2$

Bogenlänge L_K des Kurvenstücks $\tilde{\Gamma}$: $\gamma(t) = P_K(t) + g_K(t)\, n_K$

$$\gamma'(t) = (b_t - a_t)/|K| + g_K'(t)\, n_K$$

$$\|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{1 + (g_K'(t))^2}$$

$$L_K \leq |K|\,(1 + c^2|K|^2) \leq C_2\|B_Q\|$$

damit $\displaystyle\int_{\tilde{\Gamma}} v^2 \leq C_3\, m^2\, \|B_Q\|^5 \leq C_4\, m^2\, |\det B_Q|\, |T_{ref}|\, \left|\det \frac{B_Q}{\|B_Q\|}\right|^{-1} \|B_Q\|^3$

$$\leq C_5\, h(T)^3 \int_Q \|\nabla v\|^2\, dx$$

Summation über alle relevanten Dreiecke liefert die Behauptung $\boxtimes$

konkretes Problem: $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$

mit $Lu = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u + a_0 u$ $\qquad$ $a_0 \geq 0$ $\qquad$ $\sum \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \geq \underbrace{\alpha_{min}}_{>0} \|\xi\|^2$

beschränkt auf $\mathbb{R}^2$

$f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$

dann $a(u,v) = \sum_{i,j} \int_\Omega \alpha_{ij} \, \partial_j u \, \partial_i v + a_0 u v \, dx$

$b(v) = \int_\Omega f v \, dx$

$V = H_0^1(\Omega)$

einfach zu bestimmen: $a_T(u,v) = \int_{\Omega(T)} \sum \alpha_{ij} \, \partial_j u \, \partial_i v + a_0 u v \, dx$

(hier müssen Daten auch außerhalb Ω definiert sein, wenn Ω nicht konvex) $\qquad$ $b_T(v) = \int_{\Omega(T)} f v \, dx$

beachte: $u \in H_0^1(\Omega)$ kann durch 0 zu $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ fortgesetzt werden.