Kapitel 5 FEM für parabolische Differentialgleichungen

Modellproblem: Wärmeleitungsgleichung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet

$0 < T < \infty$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{in } \Omega_T = (0,T) \times \Omega \\ u = u_0 & \text{auf } \{0\} \times \Omega \\ u = g & \text{auf } (0,T) \times \partial G \end{cases}$$

oBdA $g = 0$

Satz 5.1: (Existenz schwacher Lösungen)

Sei $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $f \in \mathbb{L}^2(\Omega_T)$.

Dann gibt es genau eine Funktion $u \in H^1(\Omega_T)$ so, dass für fast alle $t \in (0,T)$ die Funktion $u(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)$ ist und $u(\cdot,t)$ für fast alle $t \in (0,T)$ der schwachen DGL

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega): \int_\Omega \partial_t u \, \varphi + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi$$

genügt. Außerdem gilt die A-Priori-Abschätzung

$$\left(\int_0^T \| u(t) \|^2_{H^1(\Omega)} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T \| \partial_t u(t) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left(\| f \|_{\mathbb{L}^2(\Omega_T)} + \| u_0 \|_{H^1(\Omega)} \right)$$

Die Anfangswerte werden im $\mathbb{L}^2$-Sinn angenommen, d.h.

$$\lim_{t \to 0, \, t > 0} \| u(\cdot, t) - u_0(t) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$$

Beweis: Numerik partieller DGL, Gerhard Dziuk

Konforme Finite Elemente: Nutze $V_\Delta \subset H_0^1(\Omega)$ endlich dimensional mit Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_N$

Finde u_Δ mit
$$\begin{cases} u_\Delta(t,\cdot) \in V_\Delta \\ u_\Delta(0,\cdot) = u_{\Delta 0} \\ \forall v_\Delta \in V_\Delta: \int_\Omega \partial_t u_\Delta v_\Delta + \int_\Omega \nabla u_\Delta \cdot \nabla v_\Delta = \int_\Omega f v_\Delta \end{cases}$$

Basisdarstellung: $u_\Delta(t,x) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t)\, \varphi_j(x)$

$$\leadsto \sum_{j=1}^N \dot{\xi}_j(t) \underbrace{\int_\Omega \varphi_j \varphi_i}_{M_{ij} \text{ „Massenmatrix"}} + \sum_{j=1}^N \xi_j(t) \underbrace{\int_\Omega \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i}_{S_{ij} \text{ „Steifigkeitsmatrix"}} = \underbrace{\int_\Omega f(t,x)\, \varphi_i(x)\, dx}_{\beta_i(t)} \qquad i = 1, \dots, N$$

$$\leadsto \quad M\dot{\xi} + S\xi = \beta \qquad \text{lineare gewöhnliche DGL}$$

Lemma 5.2. Die Massenmatrix ist positiv definit

Beweis: $\sum_{i,j} \eta_i \eta_j M_{ij} = \int \left(\sum_{k=1}^{N} \eta_k \varphi_k\right)^2 \geq 0$ mit Gleichheit gdw $\sum \eta_k \varphi_k = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$ $\boxtimes$

in expliziter Form:

$$(\text{AWP}) \begin{cases} \dot{\xi}(t) + M^{-1} S \xi(t) = M^{-1} \beta(t) \\ \xi(0) = \xi^0 \end{cases}$$

Komponenten von $u_{h0} = \sum_{j=1}^{N} \xi_j^0 \varphi_j$

Satz 5.3: Zu $\beta \in \mathbb{L}^2((0,T), \mathbb{R}^{N\times 1})$ und einem $\xi^0 \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ existiert genau eine Lösung $\xi \in H^1((0,T), \mathbb{R}^{N\times 1})$. Für diese Lösung gilt $\xi \in C^{0,\frac{1}{2}}([0,T], \mathbb{R}^{N\times 1})$.

Beweis: Wegen $W^{k,p}(G) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{G})$ ($C^{0,1}$-Rand in $\mathbb{R}^d$) mit $0<\alpha<1$, $m \in \mathbb{N}_0$ falls $k - \frac{d}{p} \geq m+\alpha$ erhalten wir für $k=1$, $p=2$, $d=1$, $m=0$ $\frac{1}{2} \geq \alpha$ (Sobolevscher Einbettungssatz)

Zu $\beta \in \mathbb{L}^2((0,T), \mathbb{R}^{N\times 1})$ gibt es $(\beta_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C([0,T], \mathbb{R}^N)$ mit $\|\beta - \beta_m\|_{\mathbb{L}^2(0,T)} \xrightarrow{m\to\infty} 0$. Zu jedem β_m gibt es mit dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutige Lösung $\xi_m \in C^1([0,T], \mathbb{R}^{N\times 1})$ von

$$\text{AWP}_m: \begin{cases} \dot{\xi}_m(t) + M^{-1} S \xi_m(t) = M^{-1} \beta_m(t) \\ \xi_m(0) = \xi^0 \end{cases}$$

Ziel: (ξ_m) ist CF in $H^1((0,T))$

$$M(\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e) + S(\xi_m - \xi_e) = \beta_m - \beta_e$$

Multiplikation mit $(\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e)^T$, Nutzung von $|\xi|_M^2 := \xi^T M \xi$, $|\xi|_S^2 = \xi^T S \xi$

$$|\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e|_M^2 + \underbrace{(\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e)^T S(\xi_m - \xi_e)}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\xi_m - \xi_e|_S^2} = (\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e)(\beta_m - \beta_e)$$

$$\int_0^T |\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e|_M^2 \, dt + \underbrace{\frac{1}{2}|\xi_m(T) - \xi_e(T)|_S^2}_{\geq 0} \leq \left(\int_0^T |\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |\beta_m - \beta_e|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\geq \lambda_{min}(M) \int_0^T |\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e|^2 \, dt$$

$$\rightsquigarrow \quad \|\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e\|_{L^2(0,T)} \leq \frac{1}{\lambda_{min}(M)} \|\beta_m - \beta_e\|_{L^2(0,T)}$$

wegen $\|\xi_m - \xi_e\|_{L^2(0,T)} \leq C \|\dot{\xi}_m - \dot{\xi}_e\|_{L^2(0,T)}$ (Poincaré-Ungleichung beachte $(\xi_m - \xi_e)(0) = 0$)

gilt $\|\xi_m - \xi_e\|_{H^1(0,T)} \leq C \|\beta_m - \beta_e\|_{L^2(0,T)}$

Sei ξ Grenzwert von (ξ_m)

$$\| \dot{\xi} + M^{-1} S \xi - M^{-1} \beta \|_{L^2(0,T)} \leq \| \dot{\xi} - \dot{\xi}_m \|_{L^2} + \| M^{-1} S (\xi - \xi_m) \|_{L^2} + \| M^{-1} (\beta - \beta_m) \|_{L^2}$$

$$\leq (1 + \lambda_{max}(M^{-1}S)) \underbrace{\| \xi - \xi_m \|_{H^1}}_{\to 0} + \lambda_{max}(M^{-1}) \underbrace{\| \beta - \beta_m \|_{L^2}}_{\to 0}$$

d.h. für fast alle $t \in (0,T)$ gilt $\dot{\xi} + M^{-1} S \xi = M^{-1} \beta$

und $\| \xi(0) - \xi^0 \| = \| \xi(0) - \xi_m(0) \| \leq \| \xi - \xi_m \|_\infty \underset{\text{Sobolevscher Einbettungssatz}}{\leq} c \| \xi - \xi_m \|_{H^1} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

d.h. ξ löst AWP

Ist $\tilde{\xi}$ weitere Lösung dann ist $\delta = \tilde{\xi} - \xi$ Lösung von $\begin{cases} \dot{\delta} + M^{-1} S \delta = 0 \\ \delta(0) = 0 \end{cases}$

Mit Gronwall folgt $\delta = 0$ $\boxtimes$

mit $u_\Delta = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \xi_i \varphi_i$

folgt $\int_\Omega \partial_t u_\Delta \, v_\Delta + \int_\Omega \nabla u_\Delta \nabla v_\Delta = \int_\Omega f v_\Delta$

also $\int_\Omega (\partial_t u - \partial_t u_\Delta) v_\Delta + \int_\Omega \nabla(u - u_\Delta) \nabla v_\Delta = 0$ für alle $v_\Delta \in V_\Delta$
(entspricht GO)

Das übliche Vorgehen: $v_\Delta = u - u_\Delta$ $\qquad \partial_t (u - u_\Delta)(u - u_\Delta) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u - u_\Delta|^2$

funktioniert nicht wegen $u - u_\Delta \notin V_\Delta$

Führe deshalb Approximation von $\partial_t u$ in V_Δ ein: die <u>Ritzprojektion</u>

Definition 5.4: Sei $V_\Delta \subset H_0^1(\Omega)$ endlich-dimensional. Dann heißt $P_\Delta : H_0^1(\Omega) \to V_\Delta$ definiert durch

$$\int_\Omega \nabla P_\Delta v \cdot \nabla w = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \qquad \text{für alle } w \in V_\Delta$$

Ritzprojektion.

beachte: P_Δ ist wohldefiniert, da $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ SP auf $H_0^1(\Omega)$

damit $\int_\Omega (P_\Delta \partial_t u - \partial_t u_\Delta)\, v_\Delta + \int_\Omega \nabla(P_\Delta u - u_\Delta) \cdot \nabla v_\Delta = \int (P_\Delta \partial_t u - \partial_t u)\, v_\Delta$

$+ \underbrace{\int_\Omega \nabla(P_\Delta u - u) \cdot \nabla v_\Delta}_{=0}$

$P_\Delta \partial_t u = \partial_t P_\Delta u$

unter geeigneten Voraussetzungen an u

dann $v_\Delta := P_\Delta u - u_\Delta$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| P_\Delta u - u_\Delta \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla (P_\Delta u - u_\Delta) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \| P_\Delta \partial_t u - \partial_t u \|_{L^2(\Omega)} \| P_\Delta u - u_\Delta \|_{L^2(\Omega)}$

$\| \underbrace{P_\Delta u - u_\Delta}_{\in H^1_0(\Omega)} \|_{L^2(\Omega)} \underset{\uparrow}{\leq} K \| \nabla (P_\Delta u - u_\Delta) \|_{L^2}$

Poincaré Ungl

mit Youngscher Ungleichung $\| P_\Delta \partial_t u - \partial_t u \|_{L^2(\Omega)} \| P_\Delta u - u_\Delta \|_{L^2(\Omega)}$

$\leq \frac{1}{2} K^2 \| P_\Delta \partial_t u - \partial_t u \|^2 + \frac{1}{2} \| \nabla P_\Delta u - u_\Delta \|^2_{L^2}$

also $\quad \frac{d}{dt} \| P_\Delta u - u_\Delta \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \| \nabla (P_\Delta u - u_\Delta) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq K^2 \| P_\Delta \partial_t u - \partial_t u \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$

d.h. $\quad \| (P_\Delta u - u_\Delta)(t) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_0^t \| \nabla (P_\Delta u - u_\Delta)(s) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ds \leq K^2 \int_0^T \| (P_\Delta \partial_t u - \partial_t u)(s) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ds$

$$+ \| u_\Delta(0) - P_\Delta u(0) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

also $\quad \sup_{t \in (0,T)} \| (u - u_\Delta)(t) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \sup_{t \in (0,T)} \| (u - P_\Delta u)(t) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + K \| P_\Delta \partial_t u - \partial_t u \|_{\mathbb{L}^2(\Omega_T)} + \| u_\Delta(0) - P_\Delta u(0) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$

und $\quad \| \nabla (u - u_\Delta) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega_T)} \leq \| \nabla (u - P_\Delta u) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega_T)} + K \| P_\Delta \partial_t u - \partial_t u \|_{\mathbb{L}^2(\Omega_T)} + \| u_\Delta(0) - P_\Delta u(0) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$

Fehlerabschätzung hängt von Approximationsgüte der Ritzapproximation und dem Anfangsfehler ab

eine analoge Abschätzung gilt für $\int_0^T \| \nabla (u - u_\Delta)(s) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} ds$

genauere Betrachtung der Ritzprojektion:

$\langle u, v \rangle := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ ist Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$ denn

Bilinearität ✓ $\quad \langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow |u|_{H^1} = 0 \Rightarrow \|u\|_{L^2} \leq C |u|_{H^1} = 0 \Rightarrow u = 0$ ✓

Poincaré Ungleichung

beachte: zugehörige Norm ist $u \mapsto |u|_{H^1}$

P_Δ ist $\langle , \rangle$ - Orthogonalprojektion auf V_Δ

denn nach Def.: $\quad \forall v_\Delta \in V_\Delta : \ \langle u - P_\Delta u, v_\Delta \rangle = 0 \quad$ d.h. $\ u - P_\Delta u \perp V_\Delta$

dann auch $\quad |u - P_\Delta u|_{H^1} = \inf_{v_\Delta \in V_\Delta} |u - v_\Delta|_{H^1} = \mathrm{dist}_{H_0^1}(u, V_\Delta) \leq |u - I_\Delta u|_{H^1}$

$\leq h(\Delta)^{t-1} |u|_{H^t(\Omega)}$

Interpolationsabschätzung für $t \geq 2$

und P_{t-1} - Ansatzraum V_Δ

mit Δ aus quasiuniformer Folge

$= \| \nabla(u - P_\Delta u) \|_{L^2(\Omega)}$

kommt in Fehlerabschätzung vor