fehlt noch Abschätzung $\| P_\Delta w - w \|_{\mathbb{L}^2}$ für $w = \partial_t u \in H^1_0(\Omega)$, $w = u$

Für Ω konvex, $g \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ ist Lösung von $(*) \begin{cases} -\Delta v = g & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$ Variationsformulierung

H^2-regulär mit $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$

$\forall \varphi \in H^1_0(\Omega): \langle v, \varphi \rangle = \int_\Omega g\varphi$

Wähle $g = P_\Delta w - w \in H^1_0(\Omega)$

$$\|g\|^2_{\mathbb{L}^2} = \int_\Omega g \underbrace{(P_\Delta w - w)}_{\text{Test fkt für } (*)} = \langle v, \underbrace{P_\Delta w - w}_{\in V_\Delta^\perp} \rangle = \langle v - v_\Delta, P_\Delta w - w \rangle$$

$$\overset{C.S}{\leq} |v - v_\Delta|_{H^1(\Omega)} |P_\Delta w - w|_{H^1} \leq C_1 h(\Delta)^{t-1} |w|_{H^t(\Omega)} |v - v_\Delta|$$

$$v_\Delta := I_\Delta v \quad \leq C_2 h(\Delta)^t |w|_{H^t(\Omega)} |v|_{H^2(\Omega)} \leq C_3 h(\Delta)^t |w|_{H^t(\Omega)} \|g\|_{\mathbb{L}^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad \|P_\Delta w - w\|_{\mathbb{L}^2} \leq C_3 h(\Delta)^t |w|_{H^t(\Omega)}$$

Lemma 5.5 Sei Δ eine Triangulierung aus einer quasiuniformen Folge eines konvexen Gebiets Ω und sei V_Δ der zugehörige P_{s-1}-Raum für ein $s \geq 2$. Sei weiter $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega)$ und P_Δ die Ritzprojektion auf V_Δ. Dann gilt

$$\| P_\Delta w - w \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + h(\Delta) \| \nabla (P_\Delta w - w) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C\, h(\Delta)^s \| w \|_{H^s(\Omega)}$$

Satz 5.6 Sei V_Δ wie in Lemma 5.5 gegeben und $u_\Delta \in H^1((0,T), V_\Delta)$ die approximative Lösung der Wärmeleitgleichung zum Anfangswert $u_{\Delta 0}$. Weiter sei $u \in H^1(\Omega_T)$ die exakte Lösung zum Anfangswert $u_0 \in H^s(\Omega)$ mit Regularität $u \in \mathbb{L}^\infty((0,T), H^s(\Omega))$ und $\partial_t u \in \mathbb{L}^2((0,T), H^s(\Omega))$. Dann gilt

$$\sup_{t \in (0,T)} \| (u - u_\Delta)(t) \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq C_1 h(\Delta)^s \left(\sup_{t \in (0,T)} \| u(t) \|_{H^s(\Omega)} + \left(\int_0^T \| \partial_t u(\tau) \|^2_{H^s(\Omega)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \| P_\Delta u(0) - u_{\Delta 0} \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

$$\left(\int_0^T \| \nabla (u - u_\Delta)(t) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 h(\Delta)^{s-1} \left(\int_0^T \| u(t) \|^2_{H^s(\Omega)} dt \right)^{\frac{1}{2}} + C_4 h(\Delta)^s \left(\int_0^T \| \partial_t u(\tau) \|^2_{H^s(\Omega)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \| P_\Delta u(0) - u_{\Delta 0} \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

Satz 5.6 zeigt, dass für hinreichend reguläre Lösungen, die gew DGL auf V_Δ ein guter Ersatz für die Wärmeleitgleichung ist

Praktische Lösung mit Zeitdiskretisierung ...

Wahl des Verfahrens hängt von Spektraleigenschaften des homogenen Systems ab

$$M\dot{\xi} + S\xi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M^{\frac{1}{2}}\dot{\xi} + M^{-\frac{1}{2}} S M^{-\frac{1}{2}} \underbrace{M^{\frac{1}{2}}\xi}_{=\zeta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\zeta} = -\underbrace{M^{-\frac{1}{2}} S M^{-\frac{1}{2}}}_{A} \zeta$$

$-A$ symmetrisch, negativ definit

$\rightsquigarrow$ Lösung asymptotisch stabil

bei Wahl eines Verfahrens beachte $\underset{\Delta t\, \sigma(A)}{\sigma(\Delta t A)} \overset{\parallel}{} \subset S$ ← Stabilitätsgebiet

Es gilt für symmetrische Matrizen A

$$\lambda_{max}(A) = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T A \xi}{\xi^T \xi} \qquad \lambda_{min}(A) = \inf_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T A \xi}{\xi^T \xi}$$

wegen $\quad A = M^{-\frac{1}{2}} S M^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\xi^T A \xi}{\xi^T \xi} = \frac{(M^{-\frac{1}{2}}\xi)^T S (M^{-\frac{1}{2}}\xi)}{(M^{-\frac{1}{2}}\xi)^T M (M^{-\frac{1}{2}}\xi)} = \frac{|w|_{H^1}^2}{\|w\|_{L^2}^2}$$

$$w = \sum (M^{-\frac{1}{2}}\xi)_i \varphi_i$$

also $$\lambda_{max}(A) = \sup_{w \in V_\Delta \setminus \{0\}} \frac{|w|_{H^1}^2}{\|w\|_{L^2}^2}$$

$$\lambda_{min}(A) = \inf_{w \in V_\Delta \setminus \{0\}} \frac{|w|_{H^1}^2}{\|w\|_{L^2}^2}$$

Poincaré Ungleichung: $\quad \|w\|_{L^2} \leq \alpha |w|_{H^1} \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_{min}(A) \geq \frac{1}{\alpha} \quad h(\Delta)$ - unabhängig!

dagegen ist $\lambda_{max}(A)$ $\quad h(\Delta)$ - abhängig

Abschätzung mit Trafosatz

$$|w|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{P \in \Delta.\text{cells}} |w|^2_{H^1(P)}$$

$$\begin{aligned}
|w|_{H^1(P)} = |w \circ A_P \circ A_P^{-1}|_{H^1(P)} &\leq C \, \|B_P^{-1}\| \, |\det B_P^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \, |w \circ A_P|_{H^1(T_{ref})} \\
&\leq C_2 \, \|B_P^{-1}\| \, |\det B_P^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \, \|w \circ A_P\|_{L^2(T_{ref})} \\
&= C_2 \, \|B_P^{-1}\| \, \|w\|_{L^2(T_{ref})} \\
&\leq C_2 \, \|B_P^{-1}\| \, \|B_P\| \, \frac{1}{\|B_P\|} \, \|w\|_{L^2(T_{ref})} \\
&\leq C_3 \, h_{min}^{-1}(\Delta) \, \|w\|_{L^2(T_{ref})}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad \lambda_{max}(A) \leq C_4 \, h_{min}(\Delta)^{-2}$

beim Auftreten kleiner Zellen ergibt sich bei expliziten RK-Verfahren eine Stabilitätsbedingung $\Delta t \cdot h_{min}(\Delta)^{-2} \leq C_5$ d.h. $\Delta t \leq C_5 \, h_{min}(\Delta)^2$

$\rightsquigarrow$ hoher Rechenaufwand!

wähle daher A-stabiles Verfahren $\rightsquigarrow$ keine Stabilitätsbedingung an Δt

einfachster Vertreter: implizites Euler Verfahren

$$t_m = m \cdot \Delta t \qquad m = 0, 1, \dots, M \qquad M\Delta t = T$$

$$M \frac{\xi^m - \xi^{m-1}}{\Delta t} + S\,\xi^m = \bar{\beta}^m := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \beta(s)\,ds$$

beachte: $\beta(t_m)$ macht keinen Sinn!

$$\int_\Omega \frac{u_\Delta^m - u_\Delta^{m-1}}{\Delta t} v_\Delta + \int_\Omega \nabla u_\Delta^m \cdot \nabla v_\Delta = \int_\Omega \bar{f}^m v_\Delta \quad , \quad u_\Delta^0 = u_{\Delta 0}$$

$u_\Delta^m = \sum \xi_i^m \varphi_i$

$$\|u^\ell\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \sum_{m=1}^{\ell} \|u^m - u^{m-1}\|^2_{\mathbb{L}^2} + \Delta t \sum_{m=1}^{\ell} \|\nabla u^m\|^2_{\mathbb{L}^2} \le \|u_{\Delta 0}\|^2_{\mathbb{L}^2} + \underbrace{C \Delta t \sum_{m=1}^{\ell} \|\bar{f}^m\|^2}_{\le \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_T)}}$$

Übungsblatt

insbesondere: $\max\limits_{0 \le m \le M} \|u^m\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le \|u_{\Delta 0}\|_{\mathbb{L}^2} + \|f\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_T)}$
(Stabilität)

untersuche Fehler : $\| u_\Delta^m - u^m \|_{L^2}$ mit $u^m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} u(s)\,ds$ ← exakte Lösung

übliche Aufspaltung: $\underbrace{\| u_\Delta^m - P_\Delta u^m \|}_{e^m \in V_\Delta} + \underbrace{\| P_\Delta u^m - u^m \|}_{\text{abschätzbar mit Eigenschaften Ritzprojektion}}$

Gleichung für den Fehler:

$$\int_\Omega \frac{e^m - e^{m-1}}{\Delta t} v_\Delta + \int_\Omega \nabla e^m \cdot \nabla v_\Delta$$

$$= \int_\Omega \bar{f}^m v_\Delta - \int_\Omega \frac{P_\Delta u^m - P_\Delta u^{m-1}}{\Delta t} v_\Delta - \int_\Omega \nabla P_\Delta u^m \nabla v_\Delta$$

$$= \int_\Omega \nabla u^m \nabla v_\Delta \quad \text{wegen Def } P_\Delta$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_\Omega \nabla u(s) \cdot \nabla v \, dx\,ds$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_\Omega f(s) v_\Delta \, dx\,ds - \int_\Omega \frac{u(t_m) - u(t_{m-1})}{\Delta t} v_\Delta$$

$$= \int_\Omega \frac{u(t_m) - u(t_{m-1})}{\Delta t} v_\Delta - \int_\Omega \frac{P_\Delta u^m - P_\Delta u^{m-1}}{\Delta t} v_\Delta$$

$$= \int_\Omega L_\Delta \underbrace{\left(\frac{u(t_m) - u(t_{m-1})}{\Delta t} - \frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} \right)}^{\text{Abschätzbar mit Taylorentwicklung}} v_\Delta + \int_\Omega L_\Delta \underbrace{\left(\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} - P_\Delta \frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} \right)}_{\text{Abschätzbar mit Eigenschaft Ritzprojektion}} v_\Delta$$

$\mathbb{L}^2$-Projektion auf V_Δ

klein unter geeigneten Voraussetzungen

$$= \int_\Omega r_\Delta^m v_\Delta$$

mit Stabilität: $\max\limits_{0 \le m \le M} \| e^m \|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le \left(\| e^m(0) \|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \Delta t \sum\limits_{m=1}^{M} \| r_\Delta^m \|^2_{\mathbb{L}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

Abschätzbar mit Eigenschaften Ritzprojektion

klein

Ergebnis:

unter geeigneten Regularitätsannahmen an u (Taylor-Entwicklung, Ritzprojektion) lässt sich Konvergenz des voll diskreten Verfahrens zeigen