Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 14. 06. 2013

Abgabe : 24. 06. 2013

Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 09

Aufgabe 1:

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit gegebender Endzeit $T > 0$:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T = (0,T) \times \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \{0\} \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } (0,T) \times \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Funktion $u(t,x)$ ist gesucht zu gegebenen Anfangsdaten $u_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ und rechter Seite $f : \Omega_T \mapsto \mathbb{R}$.

Sei $\tau > 0$ und $t_m = m\tau$ $(m = 1, \ldots, M)$ mit $M\tau = T$ eine Zeitdiskretisierung. Wir bezeichnen $u_m(x) = u(t_m, x)$ und $f_m(x) = f(t_m, x)$. Damit verwenden wir zunächst das Rückwärts-Euler-Verfahren zur Gleichungen (1),

$$\frac{u_m - u_{m-1}}{\tau} - \Delta u_m = f_m. \tag{2}$$

1) Leiten Sie die schwache Formulierung für Gleichungen (2) her, und beweisen Sie die Folgerung

Lemma 1 *Sei $u_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ und sei $f_m \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ für $m = 1, \ldots, M$. Dann gibt es genau eine Folge $(u_m)_{m=1,\ldots,M}$, so dass $u_m \in H_0^1(\Omega)$ der Variationsgleichung zu (2) genügt.*

2) Beweisen Sie die A-Priori-Abschätzung

Lemma 2 *Sei $u_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ und $f \in \mathcal{L}^2(\Omega_T)$. Für die Lösungsfolge $(u_m)_{m=1,\ldots,M}$ aus Lemma 1 gilt*

$$\|u_m\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{m} \|u_k - u_{k-1}\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \tau \sum_{k=1}^{m} \|\nabla u_k\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \le \|u_0\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + C\|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\Omega_T)} \tag{3}$$

Hinweise: Poincaré- und Youngschen Ungleichung benutzen, und auch die Gleichung

$$\langle u_{m-1}, u_m \rangle = \frac{1}{2}\{\|u_m\|^2 + \|u_{m-1}\|^2 - \|u_m - u_{m-1}\|^2\}. \tag{4}$$

Aufgabe 2:

Führen Sie für das Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \\ u(0) = u(1) &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

eine numerische Konvergenzanalyse ihres FEM Programms durch. Wählen Sie dazu eine geeignete rechte Seite f und ermitteln Sie die numerische Konvergenzordnung.