Das Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung besteht darin, zu gegebenem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, gegebener Endzeit $0 < T < \infty$ und gegebenen Anfangsdaten $u_0 : G \to \mathbb{R}$, Randdaten $g : \partial G \times (0,T) \to \mathbb{R}$ und rechter Seite $f : G \times (0,T) \to \mathbb{R}$ eine Funktion $u = u(x,t)$ zu finden, für die gilt:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } G_T = G \times (0,T), \\ u &= u_0 \quad \text{auf } G \times \{0\}, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial G \times (0,T). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Dabei sind die geeigneten Funktionenklassen noch zu klären. Wir werden im Folgenden den Fall $g = 0$ betrachten.

Inspiriert von unserem Vorgehen bei elliptischen Gleichungen im Abschnitt 2.3 suchen wir daher eine Funktion $u = u(x,t)$ für $x \in G$ und $t \in (0,T)$ mit den Eigenschaften $u(\cdot,t) \in \mathring{H}^1(G), u_t(\cdot,t) \in L^2(G)$ für fast alle $t \in (0,T)$, so dass

$$\int_G u_t \varphi + \int_G \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_G f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G), \tag{5.15}$$

fast überall auf dem Zeitintervall $(0,T)$ und außerdem $u(\cdot,0) = u_0$ gilt. Dabei lassen wir die Frage nach geeigneten Räumen zunächst offen. Unsere Lösung u wird aber im Raum $H^1(G_T)$ liegen.

Um die Existenzresultate für schwache Lösungen elliptischer Gleichungen zu nutzen und weil wir diese Art der Diskretisierung später verwenden, versuchen wir eine Zeitdiskretisierung. Sei $\tau > 0$, $M\tau = T$ und f^m eine Approximation an f, die später noch genauer definiert wird. Dann suchen wir Funktionen $u^1, \ldots, u^M \in \mathring{H}^1(G)$, so dass:

$$\int_G \frac{u^m - u^{m-1}}{\tau} \varphi + \int_G \nabla u^m \cdot \nabla \varphi = \int_G f^m \varphi \quad \forall \varphi \in \mathring{H}^1(G) \tag{5.16}$$

für $m = 1, \ldots M$ und mit $u^0 = u_0$ gilt.

Lemma 5.13. *Sei $u^0 \in L^2(G)$, und sei $f^m \in L^2(G)$ für $m = 1, \ldots, M$. Dann gibt es genau eine Folge $(u^m)_{m=1,\ldots,M}$, so dass $u^m \in \mathring{H}^1(G)$ der Gleichung (5.16) genügt.*

Beweis. Wir gehen induktiv vor. Dazu sei $u^0 = u_0$ und $u^{m-1} \in L^2(G)$. Dann gibt es nach Satz 4.5 eine eindeutig bestimmte Lösung $u^m \in \mathring{H}^1(G)$ von

$$\frac{1}{\tau} \int_G u^m \varphi + \int_G \nabla u^m \cdot \nabla \varphi = \int_G f^m \varphi + \frac{1}{\tau} \int_G u^{m-1} \varphi.$$

Unser Ziel ist nun, für die Lösung der zeitdiskretisierten Gleichung A-Priori-Abschätzungen zu finden, die unabhängig vom Diskretisierungsparameter τ sind. Dazu verwenden wir wie früher zur Abkürzung die folgende Notation für Skalarprodukt und Norm im Hilbertraum $L^2(G)$:

$$(v, w) = (v, w)_{L^2(G)}, \quad \|v\| = \|v\|_{L^2(G)}.$$

Wir wählen in (5.16) als Testfunktion $\varphi = u^m$. Dann folgt

$$\frac{1}{\tau}\|u^m\|^2 + \|\nabla u^m\|^2 = (f^m, u^m) + \frac{1}{\tau}(u^{m-1}, u^m) \le \|f^m\|\|u^m\| + \frac{1}{\tau}(u^{m-1}, u^m),$$

und wegen

$$(u^{m-1}, u^m) = -\frac{1}{2}\|u^m - u^{m-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|u^m\|^2 + \frac{1}{2}\|u^{m-1}\|^2$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau}(\|u^m\|^2 - \|u^{m-1}\|^2) + \frac{1}{2\tau}\|u^m - u^{m-1}\|^2 + \|\nabla u^m\|^2 \\ \le \|f^m\| \, \|u^m\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|u^m\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f^m\|^2, \end{aligned}$$

wobei wir auf den letzten Term noch die Youngsche Ungleichung (2.4) angewandt haben. Wir verwenden die Poincaréungleichung (2.8),

$$\|u^m\|^2 \le c_P^2 \|\nabla u^m\|^2,$$

wählen danach $\varepsilon = \frac{1}{c_P^2}$ und erhalten so die Ungleichung

$$\frac{1}{2\tau}(\|u^m\|^2 - \|u^{m-1}\|^2) + \frac{1}{2\tau}\|u^m - u^{m-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u^m\|^2 \le \frac{1}{2}\, c_P^2 \|f^m\|^2.$$

Durch Summation über m ergibt sich auf der linken Seite eine Teleskopsumme, und es folgt für alle $l = 1, \ldots M$

$$\|u^l\|^2 + \sum_{m=1}^{l} \|u^m - u^{m-1}\|^2 + \tau \sum_{m=1}^{l} \|\nabla u^m\|^2 \le \|u_0\|^2 + c_P^2 \tau \sum_{m=1}^{l} \|f^m\|^2.$$

Damit ist im Prinzip eine A-Priori-Abschätzung der u^m gelungen, allerdings müssen wir immer noch klären, wie die f^m zu definieren sind und wie sich $\|f^m\|$ in der gerade gezeigten Ungleichung gegen $\|f\|$ abschätzen läßt. Wählen wir

$$f^m(x) = \frac{1}{\tau} \int_{(m-1)\tau}^{m\tau} f(x, s)\, ds, \tag{5.17}$$

so ergibt sich

$$\|f^m\|^2 = \int_G f^m(x)^2 dx = \frac{1}{\tau^2}\int_G \Big(\int_{(m-1)\tau}^{m\tau} f(x,s)ds\Big)^2 dx$$
$$\le \frac{1}{\tau}\int_{(m-1)\tau}^{m\tau}\int_G f(x,s)^2 dxds$$

und damit

$$\tau\sum_{m=1}^{l}\|f^m\|^2 \le \sum_{m=1}^{l}\int_{(m-1)\tau}^{m\tau}\int_G f(x,s)^2 dxds \tag{5.18}$$
$$= \int_0^{l\tau}\int_G f(x,s)^2 dxds \le \|f\|^2_{L^2(G_T)}.$$

Wir fassen das Endergebnis der A-Priori-Abschätzung in einem Lemma zusammen.

Lemma 5.14. *Sei $u_0 \in L^2(G)$ und $f \in L^2(G_T)$. Sei u^m die Lösungsfolge der zeitdiskreten Gleichung (5.16) aus Lemma 5.13. Dann gilt für alle $m = 1, \ldots, M$:*

$$\|u^m\|^2_{L^2(G)} + \sum_{k=1}^{m}\|u^k - u^{k-1}\|^2_{L^2(G)} + \tau\sum_{k=1}^{m}\|\nabla u^k\|^2_{L^2(G)}$$
$$\le \|u_0\|^2_{L^2(G)} + c_P^2\,\|f\|^2_{L^2(G_T)}.$$

Insbesondere lassen sich also geeignete Normen von u^m unabhängig von den Parametern M und τ der Zeitdiskretisierung abschätzen.

Das nächste Lemma leitet eine weitere A-Priori-Abschätzung durch die Wahl einer anderen Testfunktion φ in Gleichung (5.16) her. Ziel ist die Kontrolle der diskreten und damit hoffentlich auch der kontinuierlichen Zeitableitung der Lösung.

Lemma 5.15. *Sei $u_0 \in \mathring{H}^1(G)$ und $f \in L^2(G_T)$. und bezeichne u^m die Lösungsfolge der zeitdiskreten Gleichung (5.16) aus Lemma 5.13. Dann gilt für $m = 1, \cdots, M$:*

$$\tau\sum_{k=1}^{m}\Big\|\frac{u^k - u^{k-1}}{\tau}\Big\|^2_{L^2(G)} + \|\nabla u^m\|^2_{L^2(G)} + \sum_{k=1}^{m}\|\nabla(u^k - u^{k-1})\|^2_{L^2(G)}$$

Beweis. Wir wählen die Testfunktion $\varphi = \frac{1}{\tau}(u^m - u^{m-1}) \in \mathring{H}(G)$ in der Gleichung (5.16) und erhalten

$$\|\frac{1}{\tau}(u^m - u^{m-1})\|^2 + \frac{1}{\tau}(\nabla u^m,\ \nabla(u^m - u^{m-1})) = \frac{1}{\tau}(f^m,\ u^m - u^{m-1}).$$

Wie im letzten Lemma verwenden wir die Identität

$$\frac{1}{\tau}(\nabla u^m,\ \nabla(u^m - u^{m-1})) = \frac{1}{2\tau}\|\nabla u^m\|^2 + \frac{1}{2\tau}\|\nabla(u^m - u^{m-1})\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|\nabla u^{m-1}\|^2$$

und benutzen wieder die Youngsche Ungleichung. Es folgt:

$$\frac{1}{2}\Big\|\frac{1}{\tau}(u^m - u^{m-1})\Big\|^2 + \frac{1}{2\tau}(\|\nabla u^m\|^2 - \|\nabla u^{m-1}\|^2) + \frac{1}{2\tau}\|\nabla(u^m - u^{m-1})\|^2 \le \frac{1}{2}\|f^m\|^2.$$

Summation über m unter Beachtung der Teleskopsumme auf der linken Seite ergibt dann die Behauptung des Lemmas:

$$\frac{1}{2}\tau\sum_{m=1}^{l}\Big\|\frac{1}{\tau}(u^m - u^{m-1})\Big\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u^l\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{l}\|\nabla(u^m - u^{m-1})\|^2$$
$$\le \frac{1}{2}\|\nabla u^0\|^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{m=1}^{l}\|f^m\|^2.$$

Danach verwenden wir wieder die Abschätzung (5.18). □

Unser Ziel ist es nun, aus der Lösung u^m des zeitdiskretisierten Problems zum Diskretisierungsparameter τ eine schwache Lösung u des Anfangsrandwertproblems zu konstruieren. Unsere Strategie dafür ist die folgende. Zuerst interpolieren wir die diskrete Funktion $\{u^m(x) \mid m = 1, \ldots, M, x \in G\}$ zu einer kontinuierlichen Funktion $u^\tau \in H^1(G_T)$. Dann versuchen wir, obige A-Priori-Abschätzungen für u^m auf die Interpolation u^τ zu übertragen. Diese Abschätzungen werden es uns erlauben, wenigstens für eine Teilfolge die Konvergenz von u^τ gegen eine Funktion $u \in H^1(G_T)$ für $\tau \to 0$ nachzuweisen. Damit ist der Grenzwert $u \in H^1(G_T)$ ein guter Kandidat für eine schwache Lösung des Anfangsrandwertproblems. *Dass* u wirklich eine schwache Lösung ist, bleibt dann noch in einem letzten Schritt zu zeigen.

Wir beginnen mit der Definition der Zeitinterpolierten u^τ und interpolieren dazu die u^m linear bezüglich der Zeitvariablen. Für $m = 0, \ldots, M$ verwenden wir die Abkürzung $t_m = m\tau$. Dann setzen wir für $t \in [t_{m-1}, t_m)$ und $x \in G$:

Wegen der entsprechenden Eigenschaft der u^m ist $u^\tau(\cdot,t) \in \mathring{H}^1(G)$ für jeden Zeitpunkt $t \in (0,T)$. Darüber hinaus besitzt u^τ auf G_T eine Ableitung u_t^τ im schwachen Sinne. Genauer gilt für $t \in (t_{m-1}, t_m)$ und $x \in G$ im schwachen Sinne:

$$u_t^\tau(x,t) = \frac{u^m(x) - u^{m-1}(x)}{\tau}.$$

Damit können wir zum nächsten Schritt gehen und übertragen im folgenden Lemma die A-Priori-Abschätzungen für u^m aus den Lemmata 5.14 und 5.15 auf u^τ.

Lemma 5.16. *Sei $u_0 \in \mathring{H}^1(G)$ und $f \in L^2(G_T)$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\sup_{(0,T)} \|u^\tau\|_{L^2(G)} + \sup_{(0,T)} \|\nabla u^\tau\|_{L^2(G)} + \|u_t^\tau\|_{L^2(G_T)} \le c\,(\|u_0\|_{H^1(G)} + \|f\|_{L^2(G_T)}). \quad (5.20)$$

Insgesamt folgt also

$$\|u^\tau\|_{H^1(G_T)} + \sup_{(0,T)} \|u^\tau\|_{H^1(G)} \le c(u_0, f, G, T)$$

mit einer Konstanten $c(u_0, f, G, T)$, die nicht von τ abhängt.

Beweis. Unser Ziel ist es zuerst, die Abschätzungen von u^m aus Lemma 5.15 für u^τ anzuwenden. Dazu brauchen wir allerdings nur die Definition der Zeitinterpolation einzusetzen. Für $t \in [t_{m-1}, t_m)$ hat man

$$\begin{aligned}\|\nabla u^\tau(\cdot,t)\|_{L^2(G)} &= \left\|\nabla u^{m-1} + \frac{t - t_{m-1}}{\tau}(\nabla u^m - \nabla u^{m-1})\right\| \\ &\le \frac{t_m - t}{\tau}\|\nabla u^{m-1}\| + \frac{t - t_{m-1}}{\tau}\|\nabla u^m\| \\ &\le \|\nabla u^{m-1}\| + \|\nabla u^m\|.\end{aligned}$$

Damit steht auf der rechten Seite nur noch die Norm der zeitdiskretisierten Lösung, und wir erhalten die Behauptung, indem wir die A-Priori-Abschätzung aus Lemma 5.15 anwenden:

$$\|\nabla u^\tau(\cdot,t)\|_{L^2(G)} \le c(\|u_0\|_{H^1(G)} + \|f\|_{L^2(G_T)}).$$

Der Nachweis der Ungleichung für $\|u^\tau(\cdot,t)\|_{L^2(G)}$ geht analog. Die Abschätzung der Zeitableitung erfolgt mit

$$\|u_t^\tau\|^2_{L^2(G_T)} = \int_0^T \|u_t^\tau(\cdot,t)\|^2_{L^2(G)}\,dt = \tau \sum_{m=1}^M \left\|\frac{u^m - u^{m-1}}{\tau}\right\|^2_{L^2(G)}$$

Um mit dieser Beschränktheitsaussage im nächsten Schritt die schwache Konvergenz einer Teilfolge von u^τ nachzuweisen, verwenden wir Satz 2.35, der besagt, dass eine im Hilbertraum beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge besitzt. Wir wählen den Hilbertraum $H^1(G_T)$, eine Folge $\tau_k \to 0$ und definieren $u_k = u^{\tau_k}$. Mit dem gerade bewiesenen Lemma 5.16 ergeben sich die Schranken

$$\|u_k\|_{L^2(G_T)} \le c, \quad \|\nabla u_k\|_{L^2(G_T)} \le c, \quad \|u_{k,t}\|_{L^2(G_T)} \le c,$$

also auch $\|u_k\|_{H^1(G_T)} \le c$ unabhängig von k. Damit folgt nach Satz A.14 schwache Konvergenz einer Teilfolge von u_k in $H^1(G_T)$. Wir gehen einen etwas anderen Weg, weil wir die einzelnen Ableitungen beim Grenzübergang kontrollieren wollen. Dazu wenden wir den Satz 2.35 mehrfach auf den Hilbertraum $L^2(G_T)$ an. Schwache Konvergenz einer Folge $w_k \rightharpoonup w$ für $k \to \infty$ in $L^2(G_T)$ bedeutet, dass

$$\int_{G_T} w_k \varphi \to \int_{G_T} w\varphi$$

für $k \to \infty$ für jede Funktion $\varphi \in L^2(G_T)$ gilt. Dieser Konvergenzbegriff passt also sehr gut zu der von uns in (5.15) angestrebten schwachen Differentialgleichung.

Lemma 5.17. *Sei $\tau_k \to 0$ $(k \to \infty)$ und $u_k = u^{\tau_k}$. Dann gibt es eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $u \in H^1(G_T)$, so dass für $j \to \infty$ gilt:*

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(G_T), \qquad \nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{in } L^2(G_T, \mathbb{R}^n), \qquad u_{k_j,t} \rightharpoonup u_t \quad \text{in } L^2(G_T).$$

Beweis. Da die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2(G_T)$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $u \in L^2(G_T)$, so dass $u_{k_j} \rightharpoonup u$ in $L^2(G_T)$ für $j \to \infty$. Für diese Teilfolge gilt nach Lemma 5.16 insbesondere auch $\|u_{k_j,t}\|_{L^2(G_T)} \le c$. Also gibt es eine weitere Teilfolge, die wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit wieder mit u_{k_j} bezeichnen, und einen Grenzwert $v \in L^2(G_T)$, so dass $u_{k_{j_i},t} \rightharpoonup v$ in $L^2(G_T)$ für $j \to \infty$. Zu zeigen ist noch die Konsistenz beider Grenzwerte, d. h. dass v eine schwache Zeitableitung von u ist. Sei dazu $\varphi \in C_0^\infty(G_T)$. Dann gilt unter Verwendung der Definition der schwachen Zeitableitung von u_{k_j}:

$$\int_{G_T} u\varphi_t = \lim_{j\to\infty} \int_{G_T} u_{k_j}\varphi_t = -\lim_{j\to\infty} \int_{G_T} u_{k_j,t}\varphi = -\int_{G_T} v\varphi,$$

und damit ist $v = u_t$ fast überall in G_T. Die schwache Konvergenz der Gradienten für eine weitere Teilfolge wird analog nachgewiesen. □

Unser Ziel ist der Nachweis, dass u auch tatsächlich die Differentialgleichung löst. Wir gehen dazu folgendermaßen vor: Für Testfunktionen φ der Form

$$\varphi(x,t) = \psi(x)\eta(t) \quad \text{mit } \psi \in \mathring{H}^1(G),\ \eta \in C^1([0,T])$$

versuchen wir die Gleichung

$$\underbrace{\int_{G_T} u_t^\tau \varphi}_{=I_1} + \underbrace{\int_{G_T} \nabla u^\tau \cdot \nabla\varphi}_{=I_2} - \underbrace{\int_{G_T} f\varphi}_{=I_3} = R_\tau(\varphi)$$

nachzuweisen, wobei R^τ für $\tau \to 0$ gegen Null konvergiert. Gelingt dies, so können wir bezüglich τ zum Grenzwert übergehen. Dies natürlich nur für $\tau = \tau_{k_j} \to 0$ für $j \to \infty$. Schließlich werden wir die entsprechende Gleichung ohne Zeitintegration und ohne rechte Seite, also die schwache Form der Differentialgleichung, folgern. Wir betrachten dazu die drei Terme im Einzelnen. Für I_1 setzen wir nur die Definition von u^τ ein:

$$I_1 = \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_G \frac{u^m - u^{m-1}}{\tau} \varphi\, dx\, dt = \sum_{m=1}^{M} \int_G \frac{u^m - u^{m-1}}{\tau} \psi\, dx \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta\, dt.$$

Ebenso für I_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_G \left(\nabla u^{m-1} + \frac{1}{\tau}(t - t_{m-1})\nabla(u^m - u^{m-1})\right) \cdot \nabla\psi\, dx\, \eta(t)\, dt \\ &= \sum_{m=1}^{M} \int_G \nabla u^m \cdot \nabla\psi\, dx \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta\, dt \\ &\quad + \sum_{m=1}^{M} \int_G \nabla(u^m - u^{m-1}) \cdot \nabla\psi\, dx \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{t - t_m}{\tau}\eta(t)\, dt. \end{aligned}$$

Schließlich gilt mit der Definition der zeitdiskreten rechten Seiten f^m wie in (5.17) für I_3:

$$I_3 = \sum_{m=1}^{M} \int_G f^m(x)\psi(x)\, dx \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta(t)\, dt$$

$$\sum^{M} \int^{t_m} \int (f(x,t) - f^m(x))\psi(x)\, dx\, \eta(t)\, dt$$

Wir fassen die drei Terme wieder zusammen und folgern insgesamt:

$$\begin{aligned} &\int_{G_T} u_t^\tau \varphi + \int_{G_T} \nabla u^\tau \cdot \nabla\varphi - \int_{G_T} f\varphi \\ &= \sum_{m=1}^{M} \underbrace{\left(\int_G \frac{u^m - u^{m-1}}{\tau}\psi\, dx + \int_G \nabla u^m \cdot \nabla\psi\, dx - \int_G f^m \psi\, dx\right)}_{=0 \text{ nach (5.16)}} \\ &\quad \times \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta(t)\, dt + R_\tau^1(\varphi) + R_\tau^2(\varphi) \end{aligned}$$

mit den beiden Resttermen

$$R_\tau^1(\varphi) = \sum_{m=1}^{M} \int_G \nabla(u^m - u^{m-1}) \cdot \nabla\psi\, dx \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{t - t_m}{\tau}\eta(t)\, dt,$$

$$R_\tau^2(\varphi) = \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_G (f(x,t) - f^m(x))\psi(x)\, dx\, \eta(t)\, dt,$$

und erhalten so mit $R_\tau = R_\tau^1 + R_\tau^2$ die Gleichung:

$$\int_{G_T} u_t^\tau \varphi + \int_{G_T} \nabla u^\tau \cdot \nabla\varphi - \int_{G_T} f\varphi = R_\tau(\varphi)$$

für alle Testfunktionen der Form $\varphi = \psi\eta$.

Um in dieser Gleichung für eine Folge $\tau_k \to 0$ $(k \to \infty)$ zum Grenzwert überzugehen, wenden wir Lemma 5.17 an. Danach gibt es eine in $H^1(G_T)$ schwach konvergente Teilfolge u_{k_j} von u^{τ_k}. Durch termweisen Grenzübergang in der Gleichung

$$\int_{G_T} u_{k_j,t}\varphi + \int_{G_T} \nabla u_{k_j} \cdot \nabla\varphi - \int_{G_T} f\varphi = R_{\tau_{k_j}}(\varphi)$$

erhalten wir die Gleichung:

$$\int_{G_T} u_t\varphi + \int_{G_T} \nabla u \cdot \nabla\varphi - \int_{G_T} f\varphi = \lim_{j\to\infty} R_{\tau_{k_j}}(\varphi).$$

die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
|R_\tau^1| &= \left| \sum_{m=1}^{M} \int_G \nabla(u^m - u^{m-1}) \cdot \nabla\psi dx \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{t - t_m}{\tau} \eta(t) dt \right| \\
&\le \sum_{m=1}^{M} \|\nabla(u^m - u^{m-1})\|_{L^2(G)} \|\nabla\psi\|_{L^2(G)} \int_{t_{m-1}}^{t_m} |\eta(t)| dt \\
&\le \|\nabla\psi\|_{L^2(G)} \Big(\sum_{m=1}^{M} \|\nabla(u^m - u^{m-1})\|_{L^2(G)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{m=1}^{M} \Big(\int_{t_{m-1}}^{t_m} |\eta(t)| dt \Big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$
\sum_{m=1}^{M} \Big(\int_{t_{m-1}}^{t_m} |\eta(t)| dt \Big)^2 \le \sum_{m=1}^{M} \tau \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta(t)^2 dt.
$$

Weiterhin gilt nach Lemma 5.15:

$$
\Big(\sum_{m=1}^{M} \|\nabla(u^m - u^{m-1})\|_{L^2(G)}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le c(u_0, f, G, T).
$$

Insgesamt erhalten wir so die gewünschte Konvergenz.

$$
\begin{aligned}
|R_\tau^1| &\le \|\nabla\psi\|_{L^2(G)} \sqrt{\tau} c(u_0, f, G, T) \Big(\int_0^T \eta(t)^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le c(\psi, \eta, u_0, f, G, T) \sqrt{\tau} \to 0 \quad (\tau \to 0).
\end{aligned}
$$

Zur Abschätzung des Terms R_τ^2 setzen wir die Definition (5.17) von f^m ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
R_\tau^2 &= \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_G (f(x,t) - f^m(x)) \psi(x) dx \eta(t) dt \\
&= \sum_{m=1}^{M} \int_G \psi(x) \int_{t_{m-1}}^{t_m} f(x,s) \eta(s) ds - \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta(t) dt \frac{1}{\tau} \int_{t_{m-1}}^{t_m} f(x,s) ds dx \\
&= \sum^{M} \int \psi(x) \int^{t_m} f(x,s) \Big(\eta(s) - \frac{1}{\tau} \int^{t_m} \eta(t) dt \Big) ds dx
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{m=1}^{M} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \Big(\eta(s) - \frac{1}{\tau} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta(t) dt \Big) \int_G f(x,s) \psi(x) dx ds
$$

und demnach

$$
\begin{aligned}
|R_\tau^2| \le & \Big(\sum_{m=1}^{M} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \Big(\eta(s) - \frac{1}{\tau} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta(t) dt \Big)^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \Big(\int_0^T \Big(\int_G f(x,s) \psi(x) dx \Big)^2 ds \Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt die Hölderungleichung auf das äußere Zeitintegral angewendet haben. Wir verwenden die Poincaréungleichung für Funktionen mit Mittelwert Null (Satz 3.23) in einer Raumdimension an und erhalten schließlich

$$
\int_{t_{m-1}}^{t_m} \Big(\eta(s) - \frac{1}{\tau} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \eta(t) dt \Big)^2 ds \le c\tau^2 \|\eta'\|_{L^2(t_{m-1}, t_m)}^2.
$$

Außerdem folgt

$$
\Big(\int_0^T \Big(\int_G f(x,s) \psi(x) dx \Big)^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \le \|f\|_{L^2(G_T)} \|\psi\|_{L^2(G)},
$$

so dass wir insgesamt erhalten

$$
|R_\tau^2| \le c\tau \|\eta'\|_{L^2(0,T)} \|f\|_{L^2(G_T)} \|\psi\|_{L^2(G)} \to 0 \quad (\tau \to 0).
$$

Insgesamt haben wir also

$$
R_\tau = R_\tau^1 + R_\tau^2 \to 0 \quad (\tau \to 0),
$$

und es gilt für alle $\psi \in \mathring{H}^1(G)$ und $\eta \in C^1([0,T])$ die Identität

$$
\int_0^T \Big(\int_G u_t \psi dx + \int_G \nabla u \cdot \nabla\psi dx - \int_G f \psi dx \Big) \eta dt = 0. \tag{5.21}
$$

Mithilfe des Fundamentallemmas der Variationsrechnung angewandt auf das Zeitintegral können wir so punktweise[3] für fast alle $t \in (0,T)$ die Gleichung

$$
\int_G u_t \psi + \int_G \nabla u \cdot \nabla\psi = \int_G f \psi \quad \forall \psi \in \mathring{H}^1(G).
$$

[3]Ein Approximationsargument zeigt, dass die Nullmenge aus $(0,T)$ unabhängig von ψ gewählt werden kann.

folgern. Allerdings muss diese Gleichung richtig interpretiert werden. Wir haben eine Funktion $u \in H^1(G_T)$ konstruiert. Demnach existieren u_t und ∇u als Funktionen in $L^2(G_T)$. Nach dem Satz von Fubini liegen dann die Funktionen $u_t(\cdot,t)$ und $\nabla u(\cdot,t)$ für fast alle $t \in (0,T)$ in $L^2(G)$. Das bedeutet jedoch (noch) nicht, dass $u(\cdot,t) \in H^1(G)$ ist. Auf jeden Fall impliziert der Satz von Fubini, dass $f(\cdot,t) \in L^2(G)$ für fast alle $t \in (0,T)$ ist.

Es ist eine kleine Übungsaufgabe zu zeigen, dass eine Funktion $u \in H^1(G_T)$ für fast alle $t \in (0,T)$ in $H^1(G)$ liegt.

Wir fassen das Ergebnis im nächsten Lemma zusammen.

Lemma 5.18. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $0 < T < \infty$. Weiter seien $u_0 \in \mathring{H}^1(G)$ und $f \in L^2(G_T)$. Dann gibt es eine Funktion $u \in H^1(G_T)$, so dass*

$$\int_{G_T} u_t\varphi + \int_{G_T} \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_{G_T} f\varphi \tag{5.22}$$

für alle Testfunktionen $\varphi = \psi\eta$ mit $\psi \in \mathring{H}^1(G)$ und $\eta \in C^1([0,T])$ erfüllt ist.

Die Aussage des Lemmas entspricht noch nicht dem von uns gewünschten schwachen Lösungsbegriff, wie wir ihn in (5.15) formuliert hatten. Es sind noch einige kleinere Dinge zu erledigen, um den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eine schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu erhalten.

Satz 5.19. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $0 < T < \infty$. Für die Daten des Problems gelte $u_0 \in \mathring{H}^1(G)$ und $f \in L^2(G_T)$.*

Dann gibt es genau eine Funktion $u \in H^1(G_T)$ so, dass fast alle $t \in (0,T)$ die Funktion $u(\cdot,t) \in \mathring{H}^1(G)$ ist, und $u(\cdot,t)$ für fast alle $t \in (0,T)$ der schwachen Differentialgleichung

$$\int_G u_t\varphi + \int_G \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_G f\varphi \quad \forall\varphi \in \mathring{H}^1(G) \tag{5.23}$$

genügt.

Außerdem gilt die A-Priori-Abschätzung

$$\left(\int_0^T \|u\|^2_{H^1(G)}dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T \|u_t\|^2_{L^2(G)}\right)^{\frac{1}{2}} \le c(\|f\|_{L^2(G_T)} + \|u_0\|_{H^1(G)}). \tag{5.24}$$

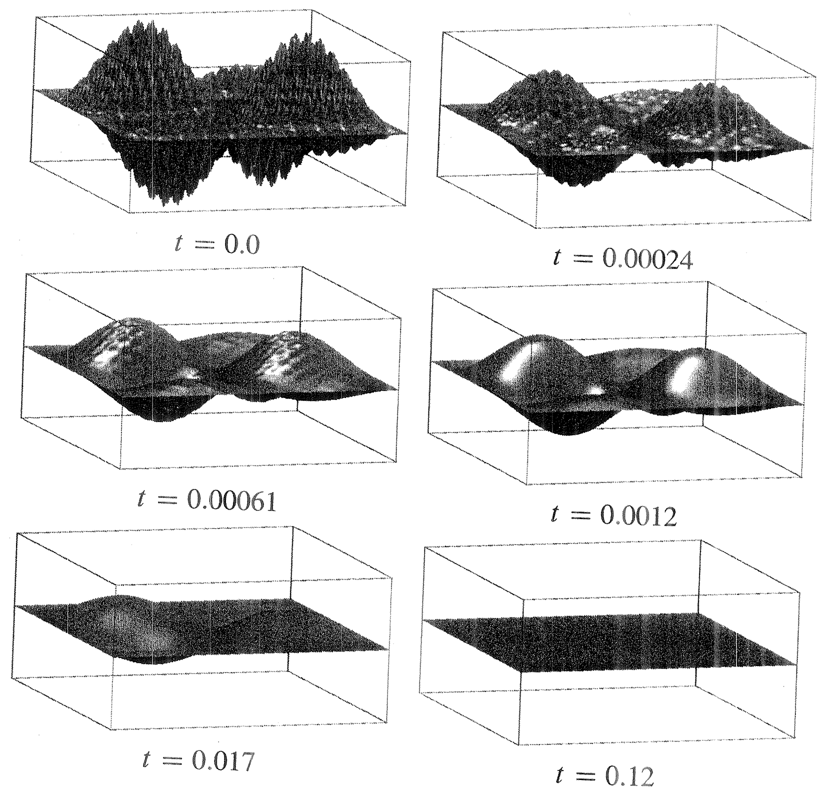


Abbildung 5.1. Glättungseffekt der Wärmeleitungsgleichung. Lösung $u = u(x,t)$ $(x \in G = (-1,1)^2 \subset \mathbb{R}^2)$ für einige Zeiten wie angegeben unter der Randbedingung $u = u_0$ auf ∂G. Der Startwert u_0 ist oben links dargestellt. Als rechte Seite wurde $f = 0$ gewählt.

Die Anfangswerte werden im $L^2(G)$-Sinn angenommen:

$$\lim_{t\to 0, t>0} \|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^2(G)} = 0. \tag{5.25}$$

Beweis. Dass die Anfangswerte im angegebenen Sinn angenommen werden ist eine Konsequenz des einfachsten Spursatzes Satz 5.37. Dieser Satz impliziert, dass für jedes (!) $t \in [0,T]$ die Funktion $u(\cdot,t) \in L^2(G)$ ist, und dass man die entsprechenden Normen gegeneinander abschätzen kann. Es gilt für eine Funktion $v \in H^1(G_T)$ und jedes $t \in [0,T]$

Wir verwenden diese Ungleichung für $v = u - u_0$ und erhalten

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^2(G)} \le c\|u - u_0\|_{H^1(G\times(0,t))} \to 0 \quad (t \to 0).$$

Nun fehlt uns nun noch eine Aussage über die Annahme der Randwerte und die schwache Differentialgleichung (5.23) auf den „Zeitschnitten", wie wir sie in (5.15) geplant hatten. Wir verwenden die Funktionalanalysis (Satz A.15) im Hilbertraum $X = H^1(G_T)$. Als Teilraum wählen wir

$$V = \{v \in H^1(G_T) \mid v(\cdot,t) \in \mathring{H}^1(G) \text{ für fast alle } t \in (0,T)\}.$$

Wenn wir nun zeigen, dass V ein abgeschlossener Teilraum von X ist, so können wir folgern, dass $u(\cdot,t) \in \mathring{H}^1(G)$ ist, denn u hatten wir in Lemma 5.17 als schwachen Grenzwert einer in $H^1(G_T)$ schwach konvergenten Folge $u^{\tau_{k_j}} \in V$, $j \in \mathbb{N}$ konstruiert.

Dass V in X abgeschlossen ist, sieht man so ein: Es sei $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus V, die in X konvergiert, $v_m \to v$ in X für $m \to \infty$. Also gilt insbesondere

$$\int_0^T w_m(t)dt \to 0 \quad (m \to \infty)$$

mit der Funktion

$$w_m(t) = \int_G (v(\cdot,t) - v_m(\cdot,t))^2 + |\nabla(v(\cdot,t) - v_m(\cdot,t))|^2\,dx \ge 0.$$

Demnach konvergiert die Folge w_m in $L^1((0,T))$ gegen 0. (Hier wurde der Satz von Fubini verwendet.) Aus der Analysis wissen wir, dass dann eine Teilfolge w_{m_j} ($j \in \mathbb{N}$) punktweise fast überall auf $(0,T)$ gegen 0 konvergiert. Dies bedeutet aber, dass $\lim_{m\to\infty} \|v_m(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{H^1(G)} = 0$ für fast alle $t \in (0,T)$ ist. Nun war $v_m(\cdot,t) \in \mathring{H}^1(G)$ für alle $t \in (0,T) \setminus N_m$, wobei N_m eine Nullmenge ist. Da die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge N ist, erhalten wir, dass $v_m(\cdot,t) \in \mathring{H}^1(G)$ für alle $t \in (0,T) \setminus N$ ist und außerdem $v_m(\cdot,t) \to v(\cdot,t)$ für $m \to \infty$ in $H^1(G)$ konvergiert. Da $\mathring{H}^1(G)$ abgeschlossener Teilraum von $H^1(G)$ ist, folgt $v(\cdot,t) \in \mathring{H}^1(G)$ für fast alle $t \in (0,T)$. Also ist V abgeschlossen.

Die Eindeutigkeit der Lösung ist wegen der Abschätzung (5.24) klar. □

Unsere Erfahrung aus der Diskretisierung der Poissongleichung lässt uns erwarten, dass wir für Fehlerabschätzungen zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung geeignete A-Priori-Abschätzungen benötigen. Hier sehen wir uns nun den einfachsten Schritt dazu an. Für fast jedes feste $t \in (0,T)$ ist nach Satz 5.19 die Lösung $u(\cdot,t) \in H^1(G)$ Lösung der schwachen Differentialgleichung

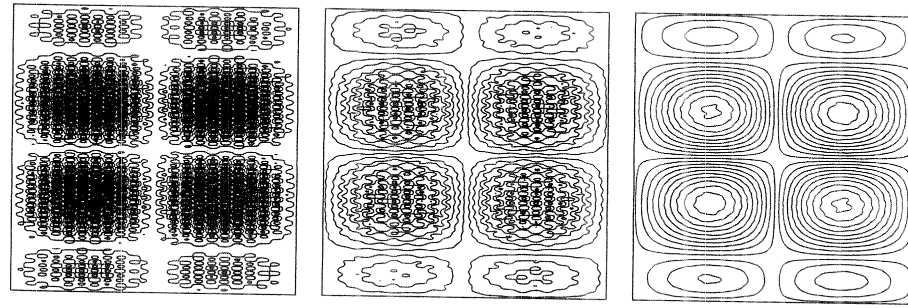
Dabei ist $f(\cdot,t) \in L^2(G)$. Genügt nun das Gebiet den Voraussetzungen des Sa 2.38, so ist $u(\cdot,t) \in H^2(G)$, und wir haben die Abschätzung

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^2(G)} \le c\|f(\cdot,t)\|_{L^2(G)}.$$

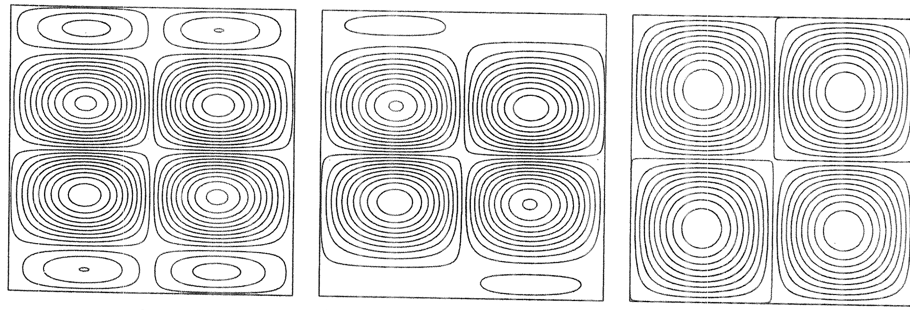
Damit folgt durch Quadrieren und Integration die folgende Aussage.

Folgerung 5.20. *Ist $\partial G \in C^2$, so liegt die kontinuierliche Lösung aus Satz 5.19 fast alle $t \in (0,T)$ im Raum $H^2(G)$ und*

$$\left(\int_G \|u(\cdot,t)\|^2_{H^2(G)}dt\right)^{\frac{1}{2}} \le c\|f\|_{L^2(G_T)}.$$



$t = 0.0$	$t = 0.00024$	$t = 0.00061$
$\min_G u = -0.953$	$\min_G u = -0.344$	$\min_G u = -0.298$
$\max_G u = 0.587$	$\max_G u = 0.348$	$\max_G u = 0.298$



$t = 0.0012$	$t = 0.017$	$t = 0.12$
$\min_G u = -0.290$	$\min_G u = -0.173$	$\min_G u = -0.0161$
$\max_G u = 0.289$	$\max_G u = 0.173$	$\max_G u = 0.0161$

Abbildung 5.2. Darstellung der Lösungen aus Abbildung 5.1 durch Ni-