Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 21. 06. 2013

Abgabe : 01. 07. 2013

Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 10

Aufgabe 1: cG(1)dG(0)

Wir betrachten wieder die Wärmeleitungsgleichung (auf Blatt 09) auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit gegebener Endzeit $T > 0$:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T = (0,T) \times \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \{0\} \times \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } (0,T) \times \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Gesucht ist die Funktion $u(t,x)$ zu gegebenen Anfangsdaten $u_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ und rechter Seite $f : \Omega_T \mapsto \mathbb{R}$.

Sei $\tau > 0$ und $t_m = m\tau$ $(m = 0, \dots, M)$ mit $M\tau = T$ eine Zeitdiskretisierung. Des weiteren sei $\Delta_m = [t_{m-1}, t_m]$ und

$$V_m = \{v(t,x) \ : \ v(t,\cdot)|_\Omega \in H_0^1, \ t \in \Delta_m; \quad v(\cdot,x)|_{\Delta_m} \in P_0(\Delta_m), \ x \in \Omega\}. \tag{2}$$

1) Leiten Sie die schwache Formulierung für Gleichung (1) auf $V = \oplus_{m=1}^M V_m$ her.

2) Vergleichen Sie diese schwache Formulierung mit der auf Blatt 09.

Aufgabe 2:

Es sei $\rho : R^+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Dichtefunktion und $\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ eine Bewegungsabbildung. Für festes t ist $\phi(t,\cdot) : R^d \mapsto \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Sei A ein beschränktes Gebiet, dann ist $\phi_t(A) = \phi(t,\cdot)(A) = \{\phi(t,x) \mid x \in A\}$ das Bild von A unter der Abbildung $\phi(t,\cdot)$.

Beweisen Sie den Transportsatz

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(A)} \rho(t,y) dy = \int_{\phi_t(A)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t,y) + \operatorname{div}(\rho(t,y) u(t,y)) dy, \tag{3}$$

wobei $u(t,\phi(t,x)) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)$.