Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 28. 06. 2013

Abgabe : 08. 07. 2013

Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 11

Aufgabe 1:

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Theorem 1 *Seien X und Y Banach-Räume. Für eine beschränkte, lineare Abbildung $L : X \mapsto Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i) Das Bild $L(X)$ ist abgeschlossen in Y.
(ii) Es ist $L(X) = (kernL')^0$.

Hier, $(\mathrm{kern}L')^0$ ist die Polare von $\mathrm{kern}L'$,

$$(\mathrm{kern}L')^0 := \{y \in Y \mid \langle y^*, y\rangle = 0, \quad \forall y^* \in \mathrm{kern}L'\}. \tag{1}$$

Aufgabe 2:

Setzen Sie $\nabla u = \sigma$ ein zur Poisson-Gleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Omega \end{aligned} \tag{2}$$

und stellen Sie das zugehörige Sattelpunktproblem auf. Überprüfen Sie die Inf-sup-Bedingung und die benötigte Elliptizitätsbedingung.

Aufgabe 3:

Sei u eine (klassische) Lösung der biharmonischen Gleichung

$$\begin{aligned} &\Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega, \\ &u = \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass $u \in H_0^1(\Omega)$ zusammen mit $w \in H^1(\Omega)$ eine Lösung des Sattelpunktproblems

$$\begin{aligned} &\int_\Omega w\eta + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta = 0, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega), \\ &\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{4}$$

ist. Überprüfen Sie die Inf-sup-Bedingung und die benötigte Elliptizitätsbedingung.

Aufgabe 4:

Führen Sie für das Problem

$$\begin{aligned} &-u''(x) = f(x) \\ &u'(0) = a, \quad u'(1) = b \end{aligned} \tag{5}$$

eine numerische Konvergenzanalyse ihres FEM Programms durch. Wählen Sie dazu eine geeignete rechte Seite f und ermitteln Sie die numerische Konvergenzordnung.