Zusammenfassung der Bedingungen an die Triangulierung

Zellbasis $:= \lceil E, d, edim, A$ mit

$edim, d \in \mathbb{N}$;

$d \leq edim$;

$E \subset \mathbb{R}^d$;

$E = \operatorname{int}(\overline{E})$;

$A \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{edim})$;

$\exists \mathcal{U}$ mit $\mathcal{U}$: offen$(\mathbb{R}^d)$; $\overline{E} \subset \mathcal{U}$, $A_{|\mathcal{U}}$: injektiv; $\forall x$ mit $x \in \mathcal{U}$ gilt $A'(x)$: injektiv $\square$

$\lambda^d(\partial E) = 0$;

$P := A(E)$

$\mu := A_{|E}\left(\left(G(A')\lambda^d\right)_{|\mathcal{B}(E)}\right) \rfloor$

Triangulierung := Γ B, Ω mit

B: Zuordnung;

Zelle := Argument(B);

Ergebnis(B) ⊏ Zellbasis;

Zelle: endlicher Begriff;

edim $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall P$ mit P: Zelle gilt B(P).edim = edim Ω; $d := \max_{P:\,\text{Zelle}} B(P).d$;

$\forall P$ mit P: Zelle gilt $P = B(P).P$;

Ω: relativ offen$\left(\bigcup_{P:\,\text{Zelle}} \overline{P}, \mathbb{R}^{\text{edim}} \right)$;

$\overline{\Omega} = \bigcup_{P:\,\text{Zelle}} \overline{P}$;

$\forall P$ mit P: Zelle gilt $P \subset \Omega$;

$\forall P, Q$ mit P, Q: Zelle; $P \neq Q$ gilt $P \cap \overline{Q} = \emptyset$;

$$\tilde{E}(P \text{ mit } P:\text{Zelle}) := \begin{cases} \mathcal{F}(\overline{P}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}) \\ f \longmapsto x \text{ mit } x \in \Omega \longmapsto \begin{cases} f(x) & x \in \overline{P} \cap \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

$$n := \begin{cases} \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto \#\{P \text{ mit } P:\text{Zelle};\ x \in \overline{P}\} \end{cases};$$

$$E(P \text{ mit } P:\text{Zelle}) := \tfrac{1}{n}\Big|_{\Omega} \tilde{E}(P)\Big|_{C^0(\overline{P}, \mathbb{R})};$$

$PC(k \text{ mit } k \in \mathbb{N}) \sum_{P:\text{Zelle}} E(P)\left(C^k(\overline{P}, \mathbb{R})\right);$

$R \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} R:$ Zuordnung; Argument$(R) =$ Zelle,

$\forall P$ mit P: Zelle gilt $R(P): \mathrm{Hom}(PC, C^0(\overline{P}, \mathbb{R}));$

$\forall u$ mit $u \in PC$ gilt $u = \sum_{P:\text{Zelle}} E(P)\, R(P)\, u;$ $\square$

$$I(P \text{ mit } P: \text{Zelle}) := \begin{cases} P \to \Omega \\ x \mapsto x \end{cases}$$

$$\mu := \sum_{\substack{P:\text{Zelle} \\ B(P).d = d}} I(P)\left(B(P), \mu\right) \quad \lrcorner$$

Basistriangulierung(B mit B: Zellbasis) $:=$ T mit

T: Triangulierung;

$\mathrm{edim}_T = d_B$; $\forall R$ mit R: Zelle$_T$ gilt $d_{\mathcal{E}_T(R)} = d_T$; $d_T = d_B - 1$;

$\Omega_T = \partial E_B$

$\exists\, n$ mit $n: \bigcup_{R:\, \text{Zelle}_T} R \longrightarrow S^{d-1}$;

$\forall x, R$ mit R: Zelle$_T$; $x \in R$ gilt $\exists\, \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$; $\forall t$ mit $t \leq \varepsilon$ gilt $x + t n(x) \in \mathbb{R}^{d_B} \setminus E_B$ $\square$;

$\forall F$ mit $F \in C^1(\overline{E}_B, \mathbb{R}^{d_B})$ gilt $\int_{E_B} \mathrm{div}\, F \, \lambda^{d_B} = \int_{\partial E_B} F \cdot n \; \mu_T$ $\square$

$\square$

T: Volumentriangulierung $:\Leftrightarrow$

T: Triangulierung;

$\mathrm{edim}_T = d_T$;

Ω_T : offen$(\mathbb{R}^{\mathrm{edim}_T})$;

$\forall P$ mit P: Zelle$_T$ gilt $\exists$ Basistriangulierung$(B_T(P))$;

$\square$