Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Stefan Hölle
Sebastian Sahli

Ausgabe: 14.04.2016
Abgabe: 20.04.2016

# Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 1

## Aufgabe 1:

Wir betrachten das folgende Funktional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx, \quad u \in H^1(0,1). \tag{1}$$

1)Zeigen Sie, dass in einem lokalen Minimum $u$ von $J$ die folgende Bedingung erfüllt ist

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \int_0^1 f(x)v(x)dx = 0, \quad v \in H^1(0,1). \tag{2}$$

Hinweis: zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von $J$ in $u$ verschwinden, d.h. $\frac{d}{d\epsilon}J(u+\epsilon v)|_{\epsilon=0} = 0$.

2) Zeigen Sie, dass das Verschwinden des integralen Mittelwerts von $f$ eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimierers von (1) ist.

3) Zeigen Sie, dass die Minimierer von $J$ nicht eindeutig sind.

4) Leiten Sie die starke Form der partiellen Differentialgleichung her, die zur schwachen Formulierung (2) gehört, indem Sie geeignete Testfunktionen wählen und geeignete Voraussetzungen für $u$ und $f$ annehmen.

## Aufgabe 2:

Sei $X$ ein Hilbertraum, $C \subset X'$ ein Unterraum und $K \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$C^\circ = I(K) \iff \overline{C} = K^\circ,$$

wobei $I$ die kanonische Einbettung von $X$ in $X''$ ist.