



Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 3

Aufgabe 1:

Sei V ein Hilbertraum und X eine Aufgabe mit $U_X = W_X = V$. Weiter sei a_X stetig und V -elliptisch. Sei u Lösung von X . Weiter sei Y eine Restriktion von X mit Lösung u_Δ . Zeigen Sie folgende Abschätzung:

$$\|u - u_\Delta\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \text{dist}_V(u, U_Y),$$

wobei C : Stetigkeitskonstante(R_X) und α : infSupKonstante(R_X).

Aufgabe 2:

Wir betrachten die schwache Formulierung des Problems aus Aufgabe 1 von Blatt 2.

- 1) Bringen Sie das Problem in eine Form wie in den Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram, d.h. finden sie einen Hilbertraum V , eine Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Linearform $b : V \rightarrow \mathbb{R}$, sodass eine Lösung u des Problems aus einer Gleichung der Form

$$a(u, v) = b(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

gewonnen werden kann (*Hinweis*: $V = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0\}$).

- 2) Zeigen Sie, dass die in 1) definierten Formen stetig sind und nennen Sie die Voraussetzungen, die sie dafür an die Daten stellen mussten.

Aufgabe 3:

Wir betrachten die Bilinearform a aus Aufgabe 2 (unter denselben Voraussetzungen wie dort). Zeigen Sie, dass unter geeigneten Voraussetzungen a V -elliptisch ist,

- 1) wenn $\Gamma_D = \partial\Omega$ gilt (d.h. bei reinen Dirichlet-Randbedingungen).
- 2) im gemischten Fall $\Gamma_D \neq \emptyset$ und $\Gamma_N \neq \emptyset$.