



## Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 5

### Aufgabe 1:

Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Gegeben seien  $x_0, \dots, x_N \in \mathbb{R}$  mit  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ . Definiere eine Triangulierung  $T$  von  $\Omega := (0, 1)$  durch die Zellen  $P_i := (x_{i-1}, x_i)$  für  $i = 1, \dots, N$ . Seien weiter auf  $\text{PC}(T)$  die Funktionale

$$L_i := R(P_{i+1})'(\delta_{x_i}) - R(P_i)'(\delta_{x_i}) \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1$$

sowie  $B_i := R(P_i)'(\delta_{x_i})$  für  $i = 1, \dots, N$  und  $B_0 := R(P_1)'(\delta_{x_0})$  definiert.

- 1) Zeigen Sie, dass  $\bigcap \ker(L_i) = \text{PC}(T) \cap C^0(\Omega)$  gilt.
- 2) Wir wählen nun auf den Zellen die endlich dimensionalen Funktionenräume  $V_{P_i} := \text{span}\{1, x\}|_{\overline{P_i}}$  und definieren  $U := \sum_{i=1}^n E(P_i)V_{P_i} \subset \text{PC}^1(T)$ .  
Zeigen Sie, dass  $\{L_i\}_{i=1, \dots, N-1} \cup \{B_i\}_{i=0, \dots, N}$  eine Basis von  $U'$  ist.
- 3) Konstruieren Sie, wie in der Vorlesung besprochen, ausgehend von den Funktionalen  $B_i$  und  $L_i$  eine Basis von  $U \cap C^0(\Omega)$ .

### Aufgabe 2 (Programmieraufgabe):

Gegeben sei die selbe Ausgangssituation wie in Aufgabe 1. Betrachten sie folgende Funktionale:

$$a_1 : U \times U \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \langle u', v' \rangle_{L^2(0,1)},$$

$$a_2 : U \times U \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_{L^2(0,1)}$$

sowie  $b : U \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \langle u, 1 \rangle_{L^2(0,1)}$ . Erstellen Sie eine MATLAB-Routine, die für gegebene  $x_0, \dots, x_N$  eine Matrix- bzw. Vektordarstellung dieser Funktionale in der Basis aus Aufgabe 1 erzeugt.