Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Stefan Hölle
Sebastian Sahli

Ausgabe: 18.05.2016
Abgabe: 25.05.2016

Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 6

Aufgabe 1:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

1) Zeigen Sie: Die Funktionen φ_i $(i = 1, \dots, N)$ sind linear unabhängig genau dann, wenn es Funktionale $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})'$ gibt, sodass die Matrix

$$(\Lambda_i(\varphi_j))_{i,j=1,\dots,N}$$

invertierbar ist (Hinweis: $\Lambda_i = \delta_{x_i}$).

2) Seien $\varphi_1, \dots \varphi_N$ wie oben linear unabhängig und Funktionale Λ_i wie in Teilaufgabe 1) gegeben. Konstruieren Sie eine Basis $\psi_1, \dots, \psi_N$ von $\operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ mit

$$\Lambda_i(\psi_j) = \delta_{ij} \qquad \text{für } i, j = 1, \dots, N.$$

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe):

Seien $t, d \in \mathbb{N}$ gegeben. Schreiben Sie (unter Verwendung von Aufgabe 1) eine MATLAB-Routine, die die dualen Polynome zu $\Sigma^1_{t,d}$ berechnet.

Die Methode soll als Rückgabewert eine Matrix liefern, die in den Spalten (oder Zeilen) die Koordinaten dieser Polynome bezüglich der Monombasis $\{x \mapsto x^\alpha | \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha|_1 \leq t\}$ enthält.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, wie sich die Multiindizes $\alpha \in M^1_{t,d}$ effizient berechnen und in eine Reihenfolge bringen lassen, um eine Situation wie in Aufgabe 1 zu erzeugen.