Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Sebastian Sahli

Ausgabe: 08.06.2016
Abgabe: 15.06.2016

Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 9

Aufgabe 1:

Sei V ein Hilbertraum und $R : V \to V'$, $x \mapsto (u \mapsto \langle u, x\rangle_V)$ die Riesz-Abbildung. Geben Sie zu $\Lambda \in V'$ eine Berechnungsvorschrift für $R^{-1}(\Lambda)$ im Sinne der FEM-Grundaufgabe an.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe):

Sei $N \in \mathbb{N}$. Gegeben seien $x_0, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ mit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ Dabei sei N so gewählt, dass $\frac{1}{2} \in \{x_1, \dots, x_{N-1}\}$ ist. Definiere eine Triangulierung T von $\Omega := (0, 1)$ durch die Zellen $P_i := (x_{i-1}, x_i)$ für $i = 1, \dots, N$.

Auf den Zellen definieren wir $V_{P_i} := \operatorname{span}\{1, x\}\big|_{\overline{P_i}}$ für $i = 1, \dots, N$ und setzen $U := \left(\sum_{i=1}^{N} E(P_i)V_{P_i}\right) \cap C^0(\Omega)$. U sei ausgestattet mit dem H^1-Skalarprodukt. Weiter sei R die Riesz-Abbildung auf U.

Plotten Sie $R^{-1}(\Lambda)$ für a) $\Lambda(u) := \delta_{\frac{1}{2}}(u)$ und b) $\Lambda(u) := \langle u, f\rangle_{L^2(0,1)}$, wobei $f \in L^2(0, 1)$, $f(x) := \mathbb{1}_{\left(0,\frac{1}{2}\right]}(x)$ sei.

Hinweise:

- Verwenden Sie Aufgabe 1), um die Inverse der Riesz-Abbildung auf U als FEM-Aufgabe aufzufassen.
- Verwenden Sie die Überlegungen aus der Übung zu Blatt 5, um eine Basis von U zu gewinnen („*Hütchenfunktionen*“).
- Erstellen Sie eine Matrix-Darstellung der zum Problem gehörenden Bilinearform und stellen Sie mit ihrer Hilfe ein Gleichungssystem für die Koordinaten der gesuchten Lösung bezüglich der gewählten Basis auf.