Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Sebastian Sahli

Ausgabe: 22.06.2016
Abgabe: 29.06.2016

Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 11

Aufgabe 1 (Programmieraufgabe):

Wie immer wird in dieser Programmieraufgabe das bestehende Projekt – dessen aktueller Stand wieder auf der Vorlesungshomepage zu finden ist – fortgeführt.

- Erstellen Sie eine von `FunctionSystem` abgeleitete Klasse `LagrangeSystem`, die ein Polynomsystem beschreibt, das dual zu den Auswertefunktionalen zu gegebenen Punkten $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ bei gegebenem $n \in \mathbb{N}$ ist. Basisfunktionen eines solchen Funktionensystems sind gerade die Lagrange-Grundpolynome zu den Stützstellen x_i ($i \in \{0, \ldots, n\}$).

  Hinweis: Die Inverse der Matrix $(\delta_{x_i}(p_j))_{i,j\in\{0,\ldots,n\}}$ (wobei $p_j(x) := x^j$ die Monome seien) enthält in den Spalten die Koordinaten der Lagrange-Grundpolynome bezüglich der Monombasis. Nutzen Sie diese Tatsache für eine effiziente Implementierung der `evaluate`- und der `get`-Methode.

- Wenig Beachtung wurde bisher der Triangulierung an sich geschenkt. Dies soll nun nachgeholt werden. Eine Triangulierung ist charakterisiert durch eine Menge von Zellen, d.h. von offenen Intervallen (x_i, x_j) für gewisse Punkte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Eine Möglichkeit, eine solche Triangulierung darzustellen, ist mithilfe zweier Matrizen p und e. Die Matrix p enthält in den Zeilen die Gitterpunkte, die Matrix e die Indizes der Punkte, die jeweils die Randpunkte einer Zelle bilden. Ein Beispiel: Die Matrizen

  $$p = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und } e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

  beschreiben die Triangulierung mit den Zellen $(0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1)$.

  Wichtigste Aufgabe der Triangulierung wird sein, die Transformationen A_P zu generieren, die die Referenzzelle zu den einzelnen Zellen der Triangulierung transformiert. Diese Transformationen tauchen jedoch nie allein auf, sondern nur bei der Integration über die Referenzzelle als $f \circ A_P |\det A'_P|$ mit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Daher ist es von Vorteil, wenn die Triangulierung in der Lage ist, zu gegebenem f das Funktionensystem $\{f \circ A_P |\det A'_P| \; | P : \text{Zelle}\}$ zurückzugeben.

  Erstellen Sie eine Klasse `Triangulation`, die zwei Matrizen p und e übergeben bekommt und eine Methode `getSystem` besitzt, die ein function handle für eine Funktion f (f ist eine Funktion auf ganz $\mathbb{R}$, also kein `Function`-Objekt in unserem Sinne) übergeben bekommt und ein `FunctionSystem`-Objekt zurückgibt, dass das oben genannte Funktionensystem repräsentiert. Erstellen Sie hierfür – wenn nötig – eine neue `FunctionSystem`-Unterklasse.

Bitte wenden!

Aufgabe 2:

Sei $\Omega \subset R^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand. Weiter sei

$$H^1_{\int}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \,|\, \int_\Omega u = 0\},$$

und für $\Gamma \subset \partial\Omega$ mit positivem $d-1$ dimensionalem Lebesguemaß sei

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \,|\, u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ f.ü. auf } \Gamma\}.$$

Zeigen Sie mit dem Satz von Bramble-Hilbert, dass $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ eine Norm auf $H^1_{\int}(\Omega)$ und $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ ist, indem Sie jeweils einen geeigneten linearen Operator L definieren, der auf dem angegebenen Raum der Identität entspricht und die konstanten Polynome im Kern enthält.