Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Sebastian Sahli

Ausgabe: 29.06.2016
Abgabe: 06.07.2016

Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 12

Aufgabe 1:

Bringen Sie das biharmonische Problem

$$\begin{aligned} &\Delta\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ &u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

in die Form der FEM-Grundaufgabe. Untersuchen Sie, ob die Voraussetzungen von Lax-Milgram erfüllt werden.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe):

Wie immer finden Sie die aktuellste Version des Programmpakets auf der Vorlesungshomepage.

- Der Einfachheit halber wollen wir im Folgenden nur noch Triangulierungen von Intervallen (a, b), die durch eine Menge von Gitterpunkten $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ und die Zellen (x_i, x_{i-1}) $(i = 1, \ldots, n-1)$ gegeben sind, betrachten. Erstellen Sie hierfür eine Spezialisierung der `Triangulation`-Klasse.

- Erstellen Sie eine Funktional-Klasse `LinearSystem` die zu einem gegebenen Funktionensystem $\mathcal{P}$ und einer Quadraturformel Q das Funktionalsystem

  $$\left\{ u \mapsto \int_0^1 u(x)p(x)\,\mathrm{d}Q \;\middle|\; p \in \mathcal{P} \right\}$$

  baut. Erstellen Sie hierzu als Oberklasse eine spezielle `FunctionalSystem`-Klasse `MultiEvaluationFunctionalSystem`, die ein System von mehreren `MultiEvaluationFunctional`-Funktionalen mit gleichen Auswertepunkten, aber unterschiedlichen Gewichten beschreibt.

- Implementieren Sie analog eine Klasse `BilinearSystem`, die das Funktionalsystem

  $$\left\{ u \mapsto \int_0^1 u(x)p(x)q(x)\,\mathrm{d}Q \;\middle|\; p, q \in \mathcal{P} \right\}$$

  beschreibt.

- Erstellen Sie eine `FunctionSystem`-Klasse `PiecewiseContinuous`, die zu einer gegebenen Intervall-Triangulierung T und einem Lagrange-System $\mathcal{P}$ den von den Funktionen q_k (siehe Vorlesung!) aufgespannten Raum beschreibt (*Hinweis:* Schleifen erlaubt!).

  Hinweis: Überlegen Sie, wie Sie die zugrundeliegende Indexmenge $\{(P, x) \mid P : \text{Zelle}_T,\ x : \text{Auswertepunkt von } \mathcal{P}\}$. durchnummerieren und zur schnellen Auswertung der q_k an beliebigen Punkten verwenden können.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe):
Mit dem bisheringen Wissen sind wir nun prinzipiell in der Lage, einfache FEM-Aufgaben zu lösen. Wir betrachten folgendes Beispiel: Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(2\pi x)$, T eine Triangulierung von $(0,1)$ und $\mathcal{P}$ ein Lagrange-System auf $(0,1)$. Gesucht ist die L^2-Projektion $\bar{u}$ von f auf den Raum $U := \sum_{P:\mathrm{Zelle}_T} E(P)\mathcal{P}$, welche charakterisiert ist durch

$$\forall v \in U : \int_0^1 \bar{u}(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Benutzen Sie die bisherigen Programme (insbesondere die Klassen von diesem Blatt), um die zu dieser Aufgabe gehörige Systemmatrix und rechte Seite aufzubauen, das Problem zu lösen und die Lösung zu plotten.