Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Sebastian Sahli

Ausgabe: 06.07.2016
Abgabe: 13.07.2016

Übungen zu Numerik PDGL II

Blatt 13 – das letzte :-)

Aufgabe 1 (Halbfinale: PC(T) vs. $C^0(\Omega)$):

Auf dem letzten Blatt wurde der Raum $V = \sum_{P:\text{Zelle}_T} E(P)\mathcal{P}$ durch die Klasse `PiecwiseContinuous` beschrieben. Letztlich von Interesse ist jedoch der Raum $U = V \cap C^0(\Omega)$.

Erweitern Sie die `PiecewiseContinuous`-Klasse um eine Methode, die eine Matrix C zur Verfügung stellt, die einen Koordinatenvektor bezüglich der q_k-Basis von V in einen Koordinatenvektor bezüglich einer aus den q_k konstruierten Basis von U transformiert. Erstellen Sie anschließend eine `FunctionSystem`-Klasse `Continuous`, die – ausgehend von einer `PiecewiseContinuous`-Darstellung von V – den Raum U beschreibt.

Aufgabe 2 (Finale):

Seien U und V wie in Aufgabe 2. Wir wollen als exemplarische FEM-Aufgabe die L^2-Projektion einer Funktion $f \in \mathcal{F}(0,1)$ auf U betrachten (siehe auch Aufgabe 3 von Blatt 12).

Erstellen Sie eine Klasse `FEMSolver`, die aus einem Polynomgrad t und einer Punktliste x (für die Triangulierung) alle zur Lösung der FEM-Aufgabe benötigten Objekte erzeugt. Erstellen Sie Funktionen zum Aufstellen der Systemmmatrix und der rechten Seite und schließlich eine Funktion `solve`, die die Lösung des Problems als `FunSysFunction`-Objekt mit Koordinaten bezüglich der Basis von U zurückgibt.

Testen Sie ihr Programm für verschiedene Funktionen f. Plotten Sie die Projektionen und im Vergleich die Ausgangsfunktionen.

*H*inweise:

- Stellen Sie das Gleichungssystem zunächst auf dem größeren Raum V auf. Die Auswertungen der `LinearSystem`- bzw. `BilinearSystem`-Klasse auf den von der `Triangulation`-Klasse gelieferten Funktionensystem $\{g \circ A_P |\det A'_P| \,|P : \text{Zelle}_T\}$ (was ist jeweils g?) enthalten alle benötigten Informationen zum Aufstellen dieses Gleichungssystems.
- Ist A die Matrix $(a(q_k, q_j))_{k,j}$ mit den Auswertungen der Basisfunktionen von V und C die Matrix aus Aufgabe 2, so erhält man die entsprechende Matrix auf U durch die Matrixmultiplikation CAC^T.