Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 17.12.2012

Abgabe: 07.01.2013
bis 9.55 Uhr in die
Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung
Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 01

Bitte beachten Sie die Guidelines zum Übungsbetrieb
auf der Vorlesungshomepage:

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/junk/teaching/Vorlesungen/NPDE/WS1213/index.php

Aufgabe 1: sparse-Matrizen

Machen Sie sich mit den Matlab-Befehlen `sparse`, `spdiags`, `full` und `spy` vertraut und testen Sie diese aus. Erstellen Sie `sparse`-Matrizen und testen Sie, bis zu welcher Matrix-Größe Sie den `full`-Befehl anwenden können. Erstellen Sie mit $S = \texttt{sparse}(i, j, s, m, n)$ eine `sparse`-Matrix S, für welche der graphische Befehl $\texttt{spy}(S)$ einen Tannenbaum liefert.

Aufgabe 2: PDGLs und Gleichungssysteme

(a) Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung analytisch:

$$u_{xx}(x) = 1 - |x| \quad , \quad x \in (-1, 1) \quad , \quad u(-1) = 5 \quad , \quad u(1) = 7$$

(b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem numerisch:

$$\begin{aligned} u_1 &= 5 \\ \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) &= 1 - |x_i| \quad , \quad i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \\ u_n &= 7 \end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{2}{n-1}$ und $x_i = -1 + (i-1)h$. Schreiben Sie das System dafür in der Form $Au = f$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathbb{R}^n$. Lösen Sie das System einerseits mit Hilfe des Matlab-Befehls `inv` und andererseits unter Verwendung des "\"-Operators. Visualisieren Sie die Lösung (x, u) und dokumentieren Sie die Laufzeiten für $n \in \{10, 50, 100, 1000, 5000, 10000\}$.

Hinweis: Aufgabe 1

(c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus (b) mit der Lösung aus (a).

- bitte wenden -

Aufgabe 3: Konstruktion von Approximationen

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit beschränkten Ableitungen. Konstruieren Sie mit Hilfe des Lagrange-Interpolationspolynoms Approximationen im Punkt $x_i = i \cdot h$

(i) der ersten Ableitung mit $u(x_{i-1}), u(x_i)$ (Rückwärtsdifferenz)

(ii) der ersten Ableitung mit $u(x_i), u(x_{i+1}), u(x_{i+2})$ (halbseitige Ableitung)

(iii) der zweiten Ableitung mit $u(x_{i-2}), u(x_{i-1}), u(x_i), u(x_{i+1}), u(x_{i+2})$

und bestimmen Sie die Genauigkeitsordnung für (i) und (ii) durch direkte Rechnung mit dem Taylorschen Satz.