Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 07.01.2013

Abgabe: 14.01.2013
bis 9.55 Uhr in die
Briefkästen vor F441

# Übungen zur Veranstaltung
# Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 02

## Aufgabe 1: Randwertaufgabe I

Lösen Sie numerisch die folgende Randwertaufgabe zunächst im Allgemeinen:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= g(x,y)\ ,\ (x,y) \in \Omega := (0,1)^2 \\ u(x,y) &= \gamma(x,y)\ ,\ (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Testen Sie ihren Code für die Randwertaufgabe, die durch $\gamma(x,y) = \exp(x^2 y)$ und $g(x,y) = (4x^2y^2 + 2y + x^4)\exp(x^2y)$ gegeben wird, durch Vergleich mit der exakten Lösung $u(x,y) = \exp(x^2y)$. Im Fall $g = 0$ entspricht $u$ annähernd der Form einer Seifenlamelle zur vorgegebenen Rahmenform $\gamma$. Testen Sie Ihren Code in diesem Fall auch für verschiedene Rahmenformen $\gamma$.

## Aufgabe 2: Randwertaufgabe II

Wie ändert sich die zugehörige Systemmatrix der Randwertaufgabe aus Aufgabe 1, wenn Sie für die Diskretisierung unterschiedliche Schrittweiten $h_x$ (in $x$-Richtung) und $h_y$ (in $y$-Richtung) verwenden?

## Aufgabe 3: Randwertaufgabe & Newton-Verfahren

Lösen Sie numerisch die Randwertaufgabe

$$\partial_{xx}u(x) = (2 + 4x^2)\sqrt{\exp(x^2)}\sqrt{u}\ ,\ u(0) = 1\ ,\ u(1) = \exp(1) \tag{1}$$

Dafür

1. diskretisieren Sie die Gleichung (1) mittels Zentraldifferenzen
2. schreiben Sie das diskretisierte System in Form $F(U) = 0$ mit

   $$U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\ ,\ n \in \mathbb{N} :\ \text{Anzahl der Diskretisierungspunkte}$$

3. lösen Sie das (nichtlineare) Gleichungssystem $F(U) = 0$ mittels Newton-Verfahren (Abbruchtoleranz $10^{-10}$)

Die exakte Lösung zu der Gleichung (1) ist gegeben durch $u_{ex}(x) = \exp(x^2)$. Berechnen Sie für $n \in \{11, 21, 41, 81, 161, 321, 641, 1281\}$ den Unterschied zwischen der numerischen und der exakten Lösung mit Hilfe der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Welche Konvergenzordnung können Sie beobachten? Wieviele Newton-Iterationen benötigen Sie? Wie verhält sich das Residuum $\|F(U^k)\|_\infty$ während der Newton-Iterationen, wobei $k$ der Iterationszähler ist?