Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 21.01.2013

Abgabe: 28.01.2013
bis 9.55 Uhr in die
Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung
Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 04

Aufgabe 1: Randwertaufgabe I

Lösen Sie numerisch die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \sigma \Delta u(t,x) = f(t,x)\ ,\ t > 0\ ,\ x \in (a,b) \\ \partial_x u(t,x)|_{x=a} = u_A \\ \partial_x u(t,x)|_{x=b} = u_B \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

Diskretisieren Sie wie folgt:

- den Δ-Operator mittels zentraler finiter Differenzen der Schrittweite h
- $\partial_x u$ mittels Vorwärtsdifferenzen am Punkt $x = a$ und mittels Rückwärtsdifferenzen am Punkt $x = b$
- die Zeitableitung $\partial_t u(t,x)$ mit Hilfe des θ-Verfahrens (testen Sie es für $\theta = 0$ und $\theta = 1$) mit Zeitschritt τ

Wählen Sie

$$\sigma = \frac{1}{10}\ ,\ u_A = 0\ ,\ u_B = 4\cos(4)\sin(t)\ ,\ a = 0\ ,\ b = 2\ ,$$
$$f(t,x) = \cos(t)\sin(x^2) - 2\sigma\sin(t)(\cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2))\ ,$$
$$u_0(x) = 0$$

Für diese Situation lautet die exakte Lösung $u_{ex}(t,x) = \sin(t)\sin(x^2)$. Berechnen Sie für $T = 2$ die Größe $e(T) = \|u_{num}(T,x) - u_{ex}(T,x)\|_\infty$, treffen Sie eine Aussage bezüglich der Konvergenzordnung und Stabilität des Verfahrens und füllen Sie folgende Tabelle aus:

Methode	h	τ	$e(T)$	Besonderheiten
explizit	0.02	0.1		
explizit	0.02	0.05		
explizit	0.02	0.025		
explizit	0.02			stabiles Verhalten
explizit	0.01	0.1		
explizit	0.01	0.05		
explizit	0.01	0.025		
explizit	0.01			stabiles Verhalten
explizit	0.005			stabiles Verhalten
implizit	0.02	0.1		
implizit	0.02	0.05		
implizit	0.02	0.025		
implizit	0.01	0.1		
implizit	0.01	0.05		
implizit	0.01	0.025		
implizit	0.005	0.1		
implizit	0.005	0.05		
implizit	0.005	0.025		
implizit	0.0025	0.1		
implizit	0.0025	0.05		
implizit	0.0025	0.025		

Aufgabe 2: diskretisierte Eigenfunktionen

Wir betrachten das folgende Dirichlet-Problem:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \lambda u \ , \ x \in \Omega := (-a, a) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des ∂_x^2-Operators vom Typ $\cos(\alpha x)$ und $\sin(\alpha x)$, die dieses Problem lösen. Zeigen Sie, dass für $h = \frac{2a}{M}$, $M \in \mathbb{N}$, die diskretisierten Eigenfunktionen $v \in \mathbb{R}^{M-1}$ mit $v_i = \cos(\alpha x_i)$ bzw. $w \in \mathbb{R}^{M-1}$ mit $w_i = \sin(\alpha x_i)$ für $i = 1, \ldots, M-1$ Eigenvektoren der Matrix

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(M-1)\times(M-1)}$$

sind. Bestimmen Sie damit eine Basis des $\mathbb{R}^{M-1}$ aus Eigenvektoren von A.