Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 28.01.2013

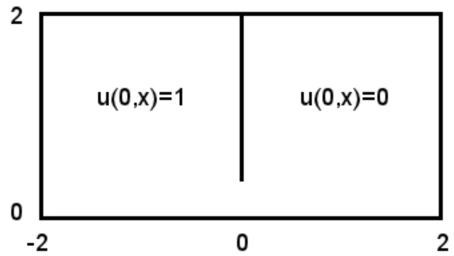
Abgabe: 04.02.2013
bis 9.55 Uhr in die
Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung
Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 05

Aufgabe 1: Diffusionsgleichung

Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (-2,2)\ ,\ x_2 \in (0,2)\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\ ,\ x_2 \in [0.3, 2)\}$ und $D > 0$. Lösen Sie numerisch das folgende 2-dimensionale Problem:



$$\partial_t u(t,x) = D \Delta u(t,x)\ ,\ t > 0\ ,\ x \in \Omega$$

mit homogenen Neumannrandbedingungen $\partial_x u = 0$ bzw. $\partial_y u = 0$ auf dem Rand von Ω. Als Startwert ist für $x \in \Omega$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1\ ,\ x_1 < 0 \\ 0\ ,\ \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Verwenden Sie bei der Diskretisierung ein äquidistantes Gitter, das die Punkte $(0,0)$ und $(0,0.3)$ enthält und verwenden Sie beim Diskretisieren der Randbedingung $\partial_x u = 0$ auf der Trennwand zwischen den beiden Kammern Rückwärtsdifferenzen für die linke bzw. Vorwärtsdifferenzen für die rechte Kammer. Am Punkt $(0,0.3)$ verwenden Sie eine Rückwärtsdifferenz zur Diskretisierung der Randbedingung $\partial_y u = 0$. Für die Diskretisierung in der Zeit verwenden Sie das Θ-Verfahren aus der Vorlesung. Stellen Sie das zu lösende Gleichungssystem auf und visualisieren Sie Ihre numerische Lösung.

Aufgabe 2: Θ-Verfahren

(a) Zeigen Sie, dass die zur räumlichen Diskretisierung zugehörige Matrix A aus Aufgabe 1 nicht invertierbar ist.
(Tipp: konstante Funktionen f erfüllen $\Delta f = 0$ und homogene Neumann-Randbedingungen)

(b) Zeigen Sie, dass die zum Θ-Verfahren aus Aufgabe 1 zugehörige Systemmatrix B eine M-Matrix ist.

(c) Zeigen Sie, dass $B^{-1}E \geq 0$ gilt für $\Theta = 1$ oder für $\Theta < 1$ und zusätzlich $\alpha \leq \frac{1}{1-\Theta}$. (Tipp: Lemma 2.2)

(d) Zeigen Sie: Ist $B^{-1}E \geq 0$ und gibt es Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq u_k^0 \leq M$, so gilt $m \leq u_k^n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit u_k^n sei der Wert der numerischen Lösung über dem k-ten Gitterpunkt zum Zeitpunkt $t_n = n\Delta t$ bezeichnet.