Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 04.02.2013

Abgabe: 11.02.2013
bis 9.55 Uhr in die
Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung
Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 06

Aufgabe 1: schwache und starke Formulierung

Es sei eine Lösung $u \in C^2((0,1)) \cap C([0,1])$ des Problems

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = g(x)\ ,\ x \in (0,1) \\ u(x) = 0\ ,\ x \in \{0,1\} \end{cases} \tag{1}$$

gesucht. Desweiteren betrachten wir den Hilbertraum

$$V = H_0^1(0,1) = \{v \in H^1(0,1) \mid v(0) = v(1) = 0\}$$

mit dem H^1-Skalarprodukt.

(a) Zeigen Sie, dass für $g \in \mathbb{L}^2(0,1)$ die schwache Lösung u von (1) der Riesz-Darstellung von $b(v) = \int_0^1 gv dx$ auf V entspricht.

(b) Zeigen Sie, dass für $w \in C^\infty([0,1])$ die Lösung von (1) mit $g = -w'' + w$ der H^1-Projektion von w auf V entspricht.

(c) Betrachten Sie die schwache Formulierung von (1) mit $b(v) = \int_0^1 gv' dx$, wobei

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ ,\ x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}\ ,\ x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} .$$

Welche starke Formulierung gehört dazu und wie nennt man die zugehörige Lösung?

Aufgabe 2: Finite-Elemente-Methode

Diskretisieren Sie das Problem (1) sowohl mit Hilfe von P_1-Elementen als auch mit Hilfe von P_2-Elementen und bestimmen Sie jeweils die Konvergenzordnung des Verfahrens bezüglich der $\mathbb{L}^2$-Norm. Testen Sie Ihren Code für jeweils ein Beispiel zu den Fällen (a), (b), (c) aus Aufgabe 1.
(Bemerkung: Verwenden Sie zur Berechnung der numerischen Integrale Quadraturformeln genügend hoher Ordnung)