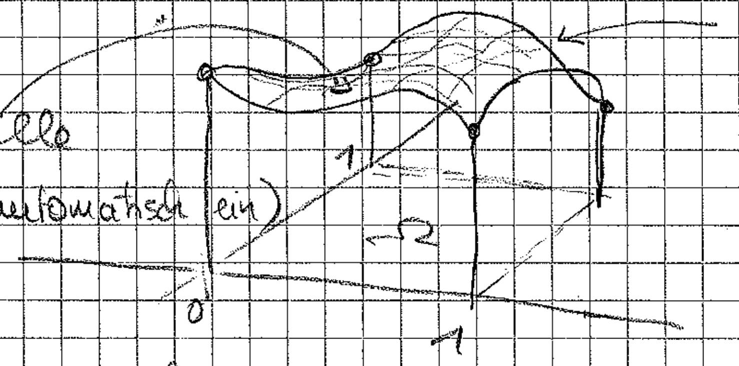
# Numerik partieller Differentialgleichungen

## Kapitel 1: Finite Differenzenmethode für elliptische DGL

### 1.1 Modellproblem: Laplace Gleichung – approximative Minimalflächen




Seifenlamelle (stellt sich automatisch ein)

Drahtrahmen (vorgegeben)

durch Funktion $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ so dass $(x_1, x_2, g(x_1,x_2))$ Drahtpunkte ergibt

Beschreibung der Form durch $u : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \longmapsto u(x_1, x_2)$

so dass $(x_1, x_2, u(x_1,x_2))$ Lamellenpunkte ergibt, ... klar $u_{|\partial\Omega} = g$

(linearisierte) physikalische Bestimmungsgleichung

$$\begin{cases} \Delta u(x_1,x_2) = 0 & (x_1,x_2) \in (0,1)^2 =: \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases}$$

überabzählbar

beachte: unendlich viele Gleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1,x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_1,x_2) = 0 \quad \text{für } \boxed{\text{jeden}} \text{ Punkt } (x_1,x_2) \in \Omega$$

$$u(x_1,x_2) = g(x_1,x_2) \quad \text{für } \boxed{\text{jeden}} \text{ Punkt } (x_1,x_2) \in \partial\Omega$$

für unendlich viele unbekannte Werte $\{u(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in \bar{\Omega}\}$

zur numerischen Lösung muss das "unendliche/kontinuierliche Problem" durch ein "endliches/diskretes" Problem" ersetzt werden!

Diesen Schritt nennt man Approximation oder Diskretisierung grundsätzliche Diskretisierungsmöglichkeiten für $u$

1) $$u = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k$$

$\phi_k$: <u>endlich</u> viele, feste Basisfunktionen

$c_k$: $u$ durch <u>endlich</u> viele Koordinaten festgelegt

2) diskretisiere $\Omega$ durch <u>endliche</u> Punktmenge $\tilde{\Omega}$

diskretisiere $u : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\tilde{u}$ ist durch <u>endlich</u> viele Funktionswerte $\{\tilde{u}(x) \mid x \in \tilde{\Omega}\}$ festgelegt

Je nach Diskretisierung von $u$ ergeben sich unterschiedliche Approximations-möglichkeiten für die Bestimmungsgleichungen ...

in der Vorlesung: (1) $\rightsquigarrow$ FEM (finite element method) (2) $\rightsquigarrow$ FDM (finite difference method)

## 1.2: Approximation von Ableitungen mit finiten Differenzen (FD)

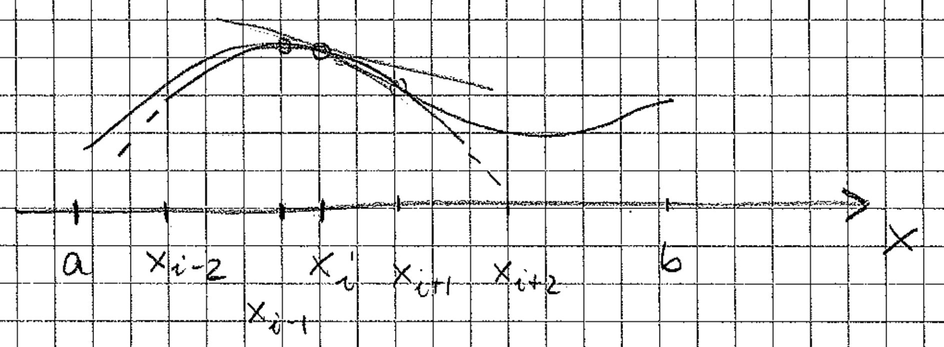
$u : \underbrace{(a,b)}_{\Omega} \to \mathbb{R}$ glatt , (DGL) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) + a \frac{\partial}{\partial x} u(x) + b u(x) = f(x)$

$\tilde{\Omega} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \Omega \qquad x_i < x_{i+1}$

$\tilde{u} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ diskret ... nicht diffbar ... was bedeutet (DGL) für $\tilde{u}$?

Grundfrage: wie soll $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x_i)$ für $\tilde{u}$ approximiert werden?

eindeutig festgelegt durch Funktionswerte $\tilde{u}(x_i)$




Aufgabe: approximiere $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x_i)$ nur durch Funktionswerte $u(x_i)$

Grundidee: ersetze $u$ durch Interpolationspolynom, leite Polynom ab

Beispiel: erste Ableitung in $x_i$ approximiert durch $u(x_i), u(x_{i+1})$

$$P(x) = u(x_i)\,\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + u(x_{i+1})\,\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$ Interpolationspolynom

Lagrange Grundpolynome

$$P'(x_i) = \frac{1}{x_i - x_{i+1}}\,u(x_i) + \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\,u(x_{i+1})$$ Linearkombination der Funktionswerte!

Koeffizienten sind Ableitungen der Lagrange Grundpol.

also: $$\frac{\partial}{\partial x} u(x)\Big|_{x=x_i} \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$ sog. Vorwärtsdifferenz

wie gut ist die Approximation?

Beantwortung mit Satz von Taylor:

Schritt 1: Entwickle Funktionswerte an Nachbarpunkten um $x_i$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}u''(\underbrace{\xi}_{\text{in } (x_i, x_{i+1})})(x_{i+1} - x_i)^2$$

Schritt 2: Setze Ergebnis in FD-Approximation ein

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i}\left(u(x_i) + u'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}u''(\xi)(x_{i+1} - x_i)^2 - u(x_i)\right)$$

$$= u'(x_i) + \frac{1}{2}u''(\xi)(x_{i+1} - x_i)$$

Schritt 3: erhalte Fehlerabschätzung wenn höchste Ableitung beschränkt ist

$$\left| \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - u'(x_i) \right| \leq C\,|x_{i+1} - x_i| \leq C\,\underbrace{\Delta x_{max}}_{\max\limits_{x_{j+1}, x_j \in \tilde{\Omega}} |x_{j+1} - x_j|}^{1}$$

Potenz

maximale "Gitterweite"

Schritt 4: Güteklassifikation

Vorwärtsdifferenz hat Genauigkeitsordnung 1

d.h. Fehler $\sim \Delta x_{max}$ wird klein auf "feinem Gitter" $\underline{\tilde{\Omega}}$

geht es auch genauer? Ja, mit mehr Punkten!

$$P(x) = u(x_{i-1}) \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} + u(x_i) \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + u(x_{i+1}) \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

$$P'(x_i) = \frac{x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} u(x_{i-1}) + \frac{2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} u(x_i) + \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} u(x_{i+1})$$

Spezialfall <u>äquidistantes Gitter</u> $x_i = a + ih$ ist einprägsamer:

$$P'(x_i) = \frac{-h}{(-h)(-2h)} u(x_{i-1}) + \frac{-h-(-h)}{h\,(-h)} u(x_i) + \frac{h}{2h \cdot h} u(x_{i+1})$$

$$= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$$ sog. <u>Zentraldifferenz</u>

Taylor zeigt: Fehler $\sim \Delta x_{max}^2$ also Genauigkeitsordnung 2 beachte: $P''(x_i)$ liefert approximative zweite Ableitung in $x_i$

$$P''(x_i) = \frac{2}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\, u(x_{i-1}) + \frac{2}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}\, u(x_i) + \frac{2}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\, u(x_{i+1})$$

einprägsam im äquidistanten Fall:

$$P''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2\,u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}$$ sog. Zentraldifferenz

Taylor zeigt: Fehler $\sim \Delta x_{max}$ im allgemeinen Fall

aber: Fehler $\sim \Delta x_{max}^2$ im äquidistanten Fall (wegen Symmetrie!)

mit diesem Rezept: 4te Ableitung mit Genauigkeitsordnung $\Delta x_{max}^3$

benötigt wie viele Punkte mindestens zur Realisierung?

Wir wissen: Interpolationsansatz führt auf Linearkombination

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(x_i) \approx \sum c_j \, u(x_{i+j})$$

$m$-te Ableitung eines Lagrange Grundpolynoms in $x_i$

eingesetzte
Taylorentwicklung führt auf

$$\sum c_j u(x_{i+j}) = \sum c_j \, u(x_i) + \sum c_j (x_{i+j} - x_i) \, u'(x_i) + \sum \tfrac{1}{2} c_j (x_{i+j} - x_i)^2 u''(x_i) + \dots$$

$$+ \sum \frac{1}{m!} c_j (x_{i+j} - x_i)^m \, u^{(m)}(x_i) + \dots + \sum \frac{1}{(m+l)!} c_j (x_{i+j} - x_i)^{m+l} u^{(m+l)}(\xi_j)$$

zwischen $x_i$ und $x_{i+j}$

damit Genauigkeitsordnung $l$ resultiert muss gelten:

$$\left.\begin{aligned} &\sum c_j = 0 \\ &\sum c_j (x_{i+j} - x_i) = 0 \\ &\quad\vdots \\ &\sum \frac{1}{m!} c_j (x_{i+j} - x_i)^m = 1 \quad c_j \sim \frac{1}{\Delta x^m} \\ &\quad\vdots \\ &\sum \frac{1}{(m+l-1)!} c_j (x_{i+j} - x_i)^{m+l-1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad m+l \text{ lineare Gleichungen für } c_j$$

(bis auf Glücksfälle) ist notwendig: mindestens $m+l$ Unbekannte $c_j$

Antwort: Erwarte Bedarf von 7 Punkten

um 4-te Ableitung mit 3er Genauigkeitsordnung approximieren zu können

bleibt zu klären, ob LGS durch $c_j = L_j^{(m)}(x_i)$ ← m-te Ableitung

auch gelöst wird ...

↖ j-tes Lagrange Grundpolynom (d.h. $L_j(x_{i+k}) = \delta_{ij}$) vom Grad $\ell + m - 1$

wir wissen: $f_k(x) = \frac{1}{k!}(x - x_i)^k \qquad 0 \leq k \leq \ell + m - 1$

wird exakt interpoliert d.h. $f_k(x) \equiv \sum f_k(x_{i+j}) L_j(x)$

also auch $\delta_{mk} = f_k^{(m)}(x_i) = \sum \frac{1}{k!}(x_{i+j} - x_i)^k \underbrace{L_j^{(m)}(x_i)}_{c_j}$ ✓

Bemerkung zur Größenordnung der Coeffizienten $C_j$:

$L_j(x)$ hat Nullstellen bei $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{l+m}$ $l+m-1$ Punkte

mit Satz von Rolle: $L_j'(x)$ hat Nullstellen bei $l+m-2$ Zwischenstellen

$L_j''(x)$ — " — $l+m-3$ — " —

$\vdots$

$L_j^{(m+l-2)}(x)$ — " — $l+m-1-(m+l-2) = 1$ Zwischenstelle

$$L_j^{(m+l-1)}(x) = (m+l-1)! \prod_{k \neq j} \frac{1}{x_j - x_k}$$ hat keine Nullstelle

damit $$\left| L_j^{(m+l-1)}(x) \right| \leq (m+l-1)! \frac{1}{\Delta x_{min}^{m+l-1}}$$

Integration ab Nullstelle von $L_j^{(m+l-2)}$ liefert $\left| L_j^{(m+l-2)}(x) \right| \leq C_1 \frac{\Delta x_{max}}{\Delta x_{min}^{m+l-1}}$

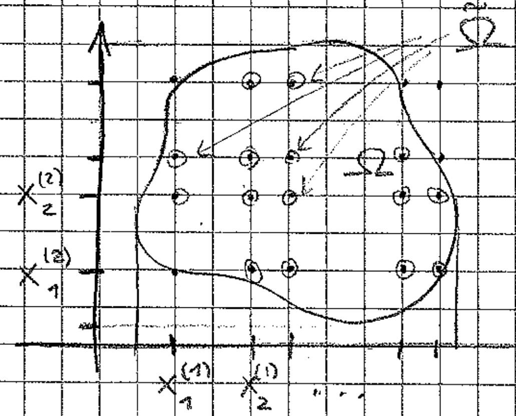
— " — $L_j^{(m+l-3)}$ — " — $\left| L_j^{(m+l-3)}(x) \right| \leq C_2 \frac{\Delta x_{max}^2}{\Delta x_{min}^{m+l-1}}$

$\vdots$ — " — $L_j^{(m)}$ liefert $|C_j| = \left| L_j^{(m)}(x_i) \right| \leq C_{l-1} \frac{\Delta x_{max}^{l-1}}{\Delta x_{min}^{m+l-1}}$ im äquidistanten Fall $\sim 1/h^m$

## 1.3 Approximation von partiellen Ableitungen in mehreren Dimensionen

1D Überlegungen können übernommen werden, wenn

$$\underline{\tilde{\Omega}} = \underline{\Omega} \cap \underbrace{\underline{\tilde{\Omega}}_1 \times \underline{\tilde{\Omega}}_2 \times \dots \times \underline{\tilde{\Omega}}_d}_{1D} = \left\{ \left(x^{(1)}_{i_1}, x^{(2)}_{i_2}, \dots, x^{(d)}_{i_d}\right) \mid x^{(k)}_{i_k} \in \underline{\tilde{\Omega}}_k \right\} \cap \underline{\Omega}$$




$\rightsquigarrow$ an jedem inneren Gitter-Punkt gibt es in jeder Koordinatenrichtung passende Nachbarpunkte

Beispiel:

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} u(x) \Big|_{(x^{(1)}_{i_1}, x^{(2)}_{i_2})} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2)\right)\Big|_{(x^{(1)}_{i_1}, x^{(2)}_{i_2})} \approx \sum c_j^{(1)} \sum c_k^{(2)}\, u\left(x^{(1)}_{i_1+j}, x^{(2)}_{i_2+k}\right)$$

$c_j^{(1)}$: Gewichte zur zweiten Ableitung in $x^{(1)}_{i_1}$

$c_k^{(2)}$: Gewichte zu erster Ableitung in $x^{(2)}_{i_2}$

für unser Modellproblem: $x_{ij} := (ih, jh) \in h\mathbb{Z}^2 \qquad h = 1/M$ für ein $M \in \mathbb{N}$

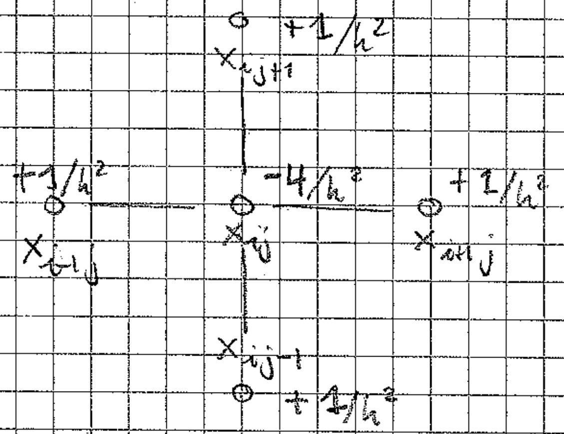
$\tilde{\Omega} = (h\mathbb{Z}^2) \cap \underbrace{(0,1)^2}_{\Omega}$ quadratisches Gitter

$$\Delta u(x_{ij}) = \frac{u(x_{i-1,j}) - 2u(x_{ij}) + u(x_{i+1,j})}{h^2} + \frac{u(x_{i,j-1}) - 2u(x_{ij}) + u(x_{i,j+1})}{h^2} + R$$

$$= \frac{u(x_{i-1,j}) + u(x_{i,j-1}) - 4u(x_{ij}) + u(x_{i+1,j}) + u(x_{i,j+1})}{h^2} + R$$

mit $|R| \leq C h^2$ wenn $u \in C^4(\bar{\Omega})$

soeg 5-Punkt Stern




$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$$

## 1.4. Lineare Differenzengleichungen in Matrix-Vektor Form

Poisson-Dirichlet Problem: $\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega = (0,1)^2 \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$

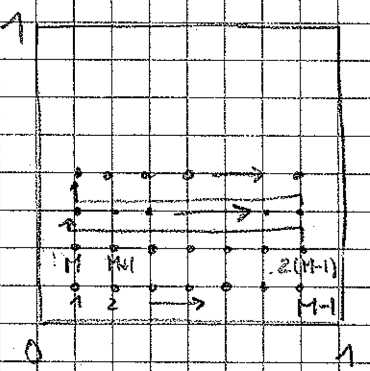
(lineare DGL)

mit FDM Diskretisierung: $\begin{cases} \underbrace{\frac{1}{h^2}\left(\tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j-1} - 4\tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i,j+1}\right)}_{=:(\Delta_h \tilde{u})_{ij}} = f(x_{ij}) & x_{ij} \in (h\mathbb{Z}^2) \cap \Omega \\ \tilde{u}_{ij} = g(x_{ij}) & x_{ij} \in (h\mathbb{Z}^2) \cap \partial\Omega \end{cases}$

(lineares GS)

wobei $\tilde{u}_{ij}$ Funktionswert von $\tilde{u}$ am Punkt $x_{ij}$

Aufbau der Matrix-Vektor Form: Schritt 1) Gitterpunkte durchnummerieren




systematisches Vorgehen erleichtert Matrix-Erzeugung

z.B. zeilenweise

bei $h = 1/M$ enthält jede Zeile $M-1$ Gitterpunkte

Unbekannte in Zeile $k$ : $\quad V_k = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1k} \\ | \\ \tilde{u}_{M-1\,k} \end{bmatrix} \qquad k = 1, \dots, M-1$

bilde Gesamtvektor $\quad W = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{M-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 1} \qquad N = (M-1)^2$

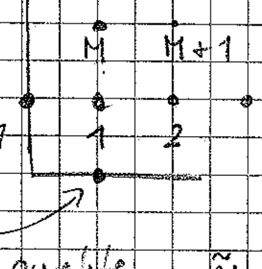
Schreibe Differenzengleichung als $\quad Aw = b$

wobei $k$-te Zeile die Differenzengleichung im $k$-ten Punkt kodiert

exemplarische Fälle :

1. Punkt

(2 fehlende Nachbarn)



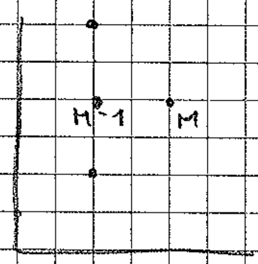

$$\frac{1}{h^2}\Big(-4\underbrace{\tilde{u}_{11}}_{w_1} + \underbrace{\tilde{u}_{21}}_{w_2} + \underbrace{\tilde{u}_{12}}_{w_M}\Big) = f(x_{11}) - \frac{1}{h^2}\big(g(x_{01}) + g(x_{10})\big)$$

$w_1$, $w_2$ im gleichen Block $V_1$ ; $w_M$ im nächsten Block $V_2$

Randpunkte ... $\tilde{u}$ durch Dirichletbedingung bekannt

2. Punkt
(1 fehlender Nachbar)

$$\frac{1}{h^2}\Big(\underbrace{w_1 - 4w_2 + w_3}_{\text{Block } v_1} + \underbrace{w_{M+1}}_{\text{Block } v_2}\Big) = f(x_{21}) - \frac{1}{h^2}\, g(x_{20})$$




(M-1). Punkt
(1 fehlender Nachbar)

$$\frac{1}{h^2}\Big(\underbrace{w_1}_{\text{Block } v_1} - \underbrace{4w_{M-1} + w_M}_{\text{Block } v_2} + \underbrace{w_{2M-1}}_{\text{Block } v_3}\Big) = f(x_{12}) - \frac{1}{h^2}\, g(x_{02})$$

M. Punkt
(innerer Punkt)

$$\frac{1}{h^2}\Big(\underbrace{w_2}_{\text{Block } v_1} + \underbrace{w_{M-1} - 4w_M + w_{M+1}}_{\text{Block } v_2} + \underbrace{w_{2M}}_{\text{Block } v_3}\Big) = f(x_{22})$$

ergibt Blockstruktur von A, b

$$\begin{bmatrix} \boxed{B} & \boxed{C} & & & \\ \boxed{C} & \boxed{B} & \boxed{C} & & \\ & \boxed{C} & \boxed{B} & \boxed{C} & \\ & & \boxed{C} & \boxed{B} & \boxed{C} \\ & & & \boxed{C} & \boxed{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{M-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & \\ & 1 & -4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} f(x_{11}) - \frac{1}{h^2} g(x_{10}) - \frac{1}{h^2} g(x_{01}) \\ f(x_{21}) - \frac{1}{h^2} g(x_{20}) \\ \vdots \\ f(x_{M-2\,1}) - \frac{1}{h^2} g(x_{M-2\,0}) \\ f(x_{M-1\,1}) - \frac{1}{h^2} g(x_{M-1\,0}) - \frac{1}{h^2} g(x_{M\,1}) \end{bmatrix} \qquad \beta_2 = \begin{bmatrix} f(x_{12}) - \frac{1}{h^2} g(x_{02}) \\ f(x_{22}) \\ | \\ f(x_{M-2\,2}) \\ f(x_{M-1\,2}) - \frac{1}{h^2} g(x_{M\,2}) \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

beachte: $A$ ist groß (bei feinem Gitter) mit sehr vielen 0-Einträgen } „dünnbesetzte Matrix"

⇝

in matlab sparse-Matrizen benutzen!

Nummerierung der Gitterpunkte beschreiben durch bijektive

Abzählfunktion $\nu : \{1, \dots, M-1\}^2 \longrightarrow \{1, \dots, (M-1)^2\}$

Damit Vektor zu $\tilde{u}$ : $\quad w_k = \tilde{u}_{\nu^{-1}(k)}$

und

kanonische Funktion zu Vektor $z$ $\quad \tilde{z}_{ij} := \begin{cases} z_{\nu(ij)} & x_{ij} \in (0,1)^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann gilt $\quad (Az)_k = (\Delta_h \tilde{z})_{\nu^{-1}(k)}$

also $\quad Az = b \iff (\Delta_h \tilde{z})_{ij} = \tilde{b}_{ij} \quad x_{ij} \in (0,1)^2$

## 1.5. Lösbarkeit des diskreten Modellproblems

$$Aw = b$$

1) gibt es Lösung $w \in \mathbb{R}^N$ ? d.h. gilt $b \in \text{Bild } A$ ?

2) sind Lösungen eindeutig ?

d.h. gilt $Aw_1 = b \wedge Aw_2 = b \Rightarrow w_1 = w_2$

bzw $A(w_1 - w_2) = 0 \Rightarrow w_1 - w_2 = 0$

bzw $\text{Kern } A = \{0\}$ ?

Da $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ folgt Lösbarkeit aus Eindeutigkeit ! ($\dim \text{Bild } A = N - \dim \text{Kern } A$)

$\operatorname{Kern} A = \{ w \in \mathbb{R}^N \mid \underline{Aw = 0} \}$

ist Diskretisierung des <u>homogenen</u> Dirichlet-Poisson Problems

$$(*) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

~~Untersuchung von (*) entscheidend für~~
~~Eindeutigkeit des DP Problems~~

Mit <u>Maximumprinzip</u> zeigt man, dass (*) nur 0-Lösung hat

Die gleiche Idee kann im diskreten Fall genutzt werden!

Definition 1.1 Sei $\tilde{u} : \frac{1}{H}\mathbb{Z}^2 \cap [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine Lösung der diskreten Laplace-Gleichung

$$(\Delta_h \tilde{u})_{ij} := \frac{1}{h^2} \left( \tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j-1} - 4\tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} \right) = 0 \quad \text{für } x_{ij} \in (0,1)^2$$

Dann heißt $\tilde{u}$ <u>diskret-harmonisch</u>. Gilt $-\Delta_h \tilde{u} \leq 0$ bzw $-\Delta_h \tilde{u} \geq 0$ auf $(h\mathbb{Z}^2) \cap (0,1)^2$ so nennt man $\tilde{u}$ <u>diskret-subharmonisch</u> bzw <u>diskret super-harmonisch</u>

Lemma 1.2. (Mittelwerteigenschaft)

Für $\tilde{u} : (\frac{1}{h}\mathbb{Z}^2) \cap [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definieren wir die Mittelwertabbildung $\varnothing$

$$(\varnothing \tilde{u})_{ij} := \frac{1}{4} \left( \tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j-1} + \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} \right) \qquad x_{ij} \in (0,1)^2$$

Es gilt: $\tilde{u}$ diskret-subharmonisch $\Rightarrow$ $\tilde{u} \leq \varnothing \tilde{u}$

$\tilde{u}$ diskret-superharmonisch $\Rightarrow$ $\tilde{u} \geq \varnothing \tilde{u}$

$\tilde{u}$ diskret-harmonisch $\Rightarrow$ $\tilde{u} = \varnothing \tilde{u}$

Beweis:
$$-(\Delta_h \tilde{u})_{ij} = \frac{4}{h^2}\left( \tilde{u}_{ij} - \frac{1}{4}\left( \tilde{u}_{i-1,j} + \tilde{u}_{i,j-1} + \tilde{u}_{i+1,j} + \tilde{u}_{i,j+1} \right)\right) = \frac{4}{h^2}\left( \tilde{u}_{ij} - (\varnothing \tilde{u})_{ij} \right)$$

daraus folgt die Beh. ▨

**Satz 1.3** (diskretes Maximumsprinzip)

Sei $\tilde{u}$ diskret - subharmonisch. Dann nimmt $\tilde{u}$ das Maximum an den Randpunkten von $[0,1]^2$ an.

Beweis: Sei $\mu := \tilde{u}_{i_0 j_0} = \max \tilde{u}$

Fall $x_{i_0 j_0} \in \partial [0,1]^2$ fertig

Fall $x_{i_0 j_0} \in (0,1)^2$

Ann: $\tilde{u}_{i_0+1\, j_0} < \mu$ dann $(\varnothing \tilde{u})_{i_0 j_0} < \mu$ dann (Lemma 1.2) $\tilde{u}_{i_0 j_0} \leq (\varnothing \tilde{u})_{i_0 j_0} < \mu$ ↯

da $\tilde{u}_{i_0+1\, j_0} > \mu$ unmöglich, folgt $\tilde{u}_{i_0+1\, j_0} = \mu$

nach spätestens $M-1$ Anwendungen der Argumentation folgt $\tilde{u}_{M j_0} = \mu$

d.h. $\max \tilde{u} = \tilde{u}_{M j_0}$ mit $x_{M j_0} \in \partial [0,1]^2$ $\blacksquare$

Bem: Der Beweis zeigt sogar, dass $\tilde{u}$ auf $(h\mathbb{Z}^2) \cap [0,1]^2 \setminus [0,1]^2$ konstant ist, wenn $\tilde{u}$ das Maximum in $(0,1)^2$ annimmt, da genauso $\tilde{u}_{i_0-1\, j_0} = \tilde{u}_{i_0 j_0-1} = \tilde{u}_{i_0 j_0+1} = \mu$ gezeigt werden kann

**Satz 1.4** (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des diskreten DP-Problems)

Die Gleichung $Aw = b$ zum diskreten DP-Problem hat für jedes $M \in \mathbb{N}$ genau eine Lösung $w \in \mathbb{R}^{(M-1)^2}$.

**Beweis:** Sei $z \in \operatorname{Kern} A$ und $\tilde{z}$ die zugehörige kanonische diskrete Funktion

Dann gilt $\Delta_h \tilde{z} = \tilde{0} = 0$

also $-\Delta_h \tilde{z} \leq 0$

Mit Satz 1.3 folgt $\tilde{z} \leq \max\limits_{x_{ij} \in \partial(0,1)^2} \tilde{z}_{ij} \overset{\text{Def von } \tilde{z}}{=} 0$

Genauso: $\Delta_h(-\tilde{z}) = 0 \Rightarrow -\tilde{z} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \tilde{z} \leq 0 \Rightarrow \tilde{z} = 0 \Rightarrow z = 0$

also $\operatorname{Kern} A = \{0\}$ $\rightsquigarrow$ eindeutige Lösbarkeit $\blacksquare$