1.6. Qualität der diskreten Lösung

Sei $u_k := u(x_{\nu^{-1}(k)})$ der Vektor zur exakten Lsg von (PDP)

Für den Fehler $\|u - w\|$ gilt

$$\|u-w\| = \|E^{-1}(E(u)) - E^{-1}(E(w))\| \leq \|A^{-1}\| \, \|E(u) - \underbrace{E(w)}_{=0}\| = \|A^{-1}\| \, \|\underbrace{E(u)}_{\text{Residuum}}\|$$

Residuum

$Au - b$

$E(v) := Av - b$ dann $E(w) = 0$ und

$E^{-1}(z) = A^{-1}(z + b)$ ist Lip-stetig mit Lip-Konstante $\|A^{-1}\|$

Ergebnis: Wenn die exakte Lösung das approximative Problem für $h \to 0$ immer besser löst (Konsistenz)

und $\|A^{-1}\|$ gitterunabhängig beschränkt ist (Stabilität)

dann ist die numerische Lösung für $h \to 0$ immer näher an der exakten Lösung (Konvergenz)

Lemma 1.5: Sei $u \in C^4([0,1]^2)$ Lösung des Problems (PDP) und sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $b \in \mathbb{R}^N$ gemäß Abschnitt 1.4 konstruiert mit $N = (M-1)^2$ und $h = 1/M$, $M \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $C > 0$ unabhängig von M mit $\| Au - b \|_\infty \leq Ch^2$ wobei $u_k = u(x_{\nu^{-1}(k)})$ $k = 1, \dots, N$ die Auswertung der exakten Lösung an den Gitterpunkten ist.

Beweis: $(Au - b)_{\nu(i,j)} = (\Delta_h u)_{ij} - f(x_{ij})$ nach Definition der Gleichung $\nu(i,j)$ und wegen $u(x_{ij}) = g(x_{ij})$ $x_{ij} \in \partial [0,1]^2$

$= (\Delta_h u)_{ij} - (\Delta u)(x_{ij})$ da $\Delta u = f$

mit FD-Approximation (Satz von Taylor) $|(Au - b)_{\nu(i,j)}| \leq Ch^2$

enthält Schranke der vierten Ableitungen von u

$\blacksquare$

Zur Berechnung von $\|A^{-1}\|$ nutzen wir aus, dass $-A^{-1}_{kl} \geq 0$ ist

und für nichtnegative Matrizen L: $\|L\| = \|Le\|_\infty$ mit $e = (1, \ldots, 1)^T$ gilt:

Definition 1.6 Seien $u, v \in \mathbb{R}^N$. Wir schreiben $u \geq v$ wenn $u_i \geq v_i$ für alle i (entsprechend auch $u \leq v$). Die Notation $u > v$ (bzw $u < v$) steht wie üblich für $u \leq v \wedge u \neq v$ (bzw $u \leq v \wedge u \neq v$) Den Sonderfall $u_i > v_i$ für alle i notieren wir mit $u \gg v$.

Eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ heißt <u>nicht-negativ</u> oder <u>monoton</u>, falls $L_{kl} \geq 0$ für alle k, l. Wir schreiben $L \geq 0$.

Bem. Sei $L \geq 0$ und $u \geq 0$, dann ist $Lu \geq 0$

wenn $u \geq v$, dann $u - v \geq 0$ und $L(u - v) \geq 0$, also

$u \geq v \Rightarrow Lu \geq Lv$ "Monotonie"

Lemma 1.7: Die Matrix $-A$ aus Abschnitt 1.4. ist <u>inversmonoton</u> d.h. $-A^{-1} \geq 0$

Beweis: Sei $c \geq 0$.

kanon. Fortsetzung

Sei $z = A^{-1} c$ d.h. $-Az = \underbrace{-c}_{\leq 0}$ also $-(\Delta_h \tilde{z})_{ij} = -\tilde{c}_{ij}$ $x_{ij} \in \Omega$

also $\hat{z}$ diskret sub-harmonisch

Mit Satz 1.3 folgt $\tilde{z} \leq 0$ d.h. $-A^{-1} c \geq 0$

Setze $c = e_1, e_2, \ldots \rightsquigarrow -A^{-1}_{kl} \geq 0$ für alle k, l ∎

Lemma 1.8 Sei $L \in \mathbb{R}^n$ und $L \geq 0$ sowie $e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt $\|L\| = \|Le\|_\infty$ für die durch $\|\cdot\|_\infty$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$.

Beweis: Klar: $\|Le\|_\infty \leq \|L\| \, \|e\|_\infty = \|L\|$

Für $x \neq 0$ beliebig ist

$$\|Lx\|_\infty = \max_i \Big| \sum_j L_{ij} x_j \Big| \leq \max_i \sum_j \overset{\text{beachte} \geq 0}{L_{ij}} |x_j| \leq \max_i \underbrace{\sum_j L_{ij}}_{=(Le)_i} \max_j |x_j| = \|Le\|_\infty \|x\|_\infty$$

also $\quad \|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|Le\|_\infty \quad \blacksquare$

Idee:

$-A^{-1}e$ ist approximative Lösung von $(*) \begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$

für feiner werdendes Gitter nähert sich das Maximum $\|A^{-1}e\|_\infty$ dem festen Maximum von u ... ist also gitterunabhängig abschätzbar!

Ausführung:

Lösung von $(*)$ nicht analytisch bekannt ... nutze statt dessen

$P(x,y) = \frac{1}{4}\big(x(1-x) + y(1-y)\big)$ $\quad$ dann $\begin{cases} -\Delta P = 1 & \text{in } \Omega \\ P \geq 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$

und $P \leq P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$

Lemma 1.9. Für die Matrix A aus Abschnitt 1.4 gilt $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{8}$.

Beweis: Sei $\tilde{P}_{ij} = P(x_{ij})$ und $p_k = \tilde{P}_{\nu^{-1}(k)}$

Dann $(\Delta_h \tilde{P})_{ij} = \underbrace{\Delta P(x_{ij})}_{=-1} + R = -1$

$R \leq Ch^2 \underbrace{\left(\|\frac{\partial^4}{\partial x^4} P\|_\infty + \|\frac{\partial^4}{\partial y^4} P\|_\infty \right)}_{=0}$

und an randnahen Punkten

$$(Ap)_{\nu(i,j)} = \underbrace{(\Delta_h \tilde{P})_{ij}}_{-1} - \frac{1}{h^2} \sum_{\substack{x_{kl} \in \partial\Omega \\ \|x_{kl} - x_{ij}\|_\infty = h}} \overbrace{P(x_{kl})}^{\geq 0} \leq -1$$

allgemein gilt also $Ap \leq -e$ bzw $-Ap \geq e$

da $-A^{-1}$ monoton: $-A^{-1}(-Ap) \geq -A^{-1}e$ d.h. $-A^{-1}e \leq p$

also $\|-A^{-1}e\|_\infty \leq \|p\|_\infty \leq \frac{1}{8}$ mit Lemma 1.8 folgt Beh ▨

Satz 1.10 Sei $u \in C^4([0,1]^2)$ Lösung des Problems (PDP) und $w_h \in \mathbb{R}^N$, $N = (M-1)^2$, $h = 1/M$, $M \in \mathbb{N}$ die Lösung zum diskreten Problem aus Abschnitt 1.4

Dann gibt es eine h-unabhängige Konstante $C > 0$ so dass $\|u - w_h\|_\infty \leq Ch^2$ wobei $u_k = u(x_{\nu^{-1}(k)})$ für $k = 1, \dots, N$.

Das Approximationsverfahren ist <u>konvergent</u> von <u>zweiter Ordnung</u>.

Beweis: nutze zentrale Fehlerabschätzung, Lemma 1.5 und Lemma 1.9 $\blacksquare$

1.7 M-Matrizen

Die Monotonieeigenschaft von $-A^{-1}$ folgte aus dem Maximumprinzip

Verallgemeinerung der Idee durch Theorie der M-Matrizen:

Definition 1.11 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ heißt L_0-Matrix, falls $A_{ij} \leq 0$ für $1 \leq i,j \leq N$, $i \neq j$

A heißt M-Matrix, falls A eine invers-monotone L_0-Matrix ist

Satz 1.12. (Charakterisierung von M-Matrizen)

Sei A eine L_0-Matrix. Dann sind äquivalent

(i) A ist eine M-Matrix

(ii) Es gibt $p \gg 0$ mit $Ap \gg 0$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Setze $p := A^{-1}e$ klar $Ap = e \gg 0$ und $p \geq 0$ da $e \geq 0$ und A^{-1} monoton. Ann. $0 = p_i = \sum_j \underbrace{A^{-1}_{ij}}_{\geq 0}$ also i-te Zeile von A^{-1} ist Nullzeile $\lightning$

(ii) $\Rightarrow$ (i): $A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Diagonalanteil}}}{D} - \underbrace{L}_{\geq 0}$

$$0 \ll Ap = Dp - \underbrace{Lp}_{\geq 0} \leq Dp = \begin{pmatrix} A_{11} p_1 \\ \vdots \\ A_{NN} p_N \end{pmatrix}$$ da $p_i > 0$ folgt $A_{ii} > 0$ für alle i

$\Leftrightarrow$ D invertierbar

$$0 \ll D^{-1} A p = (I - D^{-1} L)\, p \quad \Rightarrow \quad D^{-1} L p \ll p$$

In der Norm $\|x\|_p := \max\limits_{i=1}^{N} \frac{|x_i|}{p_i}$ gilt für $B = D^{-1} L \geq 0$ wegen $\max\limits_i \frac{(Bp)_i}{p_i} < 1$

$$\|Bx\|_p = \max_i \frac{|\sum_j B_{ij} x_j|}{p_i} \leq \max_i \frac{\overbrace{\sum_j B_{ij} p_j}^{(Bp)_i} \overbrace{\max_j \frac{|x_j|}{p_j}}^{\|x\|_p}}{p_i} < \|x\|_p$$

$\rightsquigarrow$ also $\|B\| < 1$ in zugeh. Matrixnorm d.h. $I - B$ invertierbar

mit $(I - B)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{B^k}_{\geq 0} \geq 0$ wegen $D^{-1} A = I - B$ ist

auch A invertierbar mit $A^{-1} = \underbrace{(I - B)^{-1}}_{\geq 0} \underbrace{D^{-1}}_{\geq 0} \geq 0$ also A inverse-monoton

Lemma 1.13 Sei A eine M-Matrix und $p \gg 0$ mit $Ap \gg 0$

Dann gilt $\|A^{-1}y\|_\infty \leq C \|y\|_\infty$ mit $C = \frac{\max p_i}{\min (Ap)_i}$

Beweis: $Ap \geq \min\limits_{i=1}^{N} (Ap)_i \, e$

Da A inversmonoton: $p = A^{-1}Ap \geq \min (Ap)_i \, A^{-1}e$

d.h. $A^{-1}e \leq \frac{1}{\min (Ap)_i} p$ also $\|A^{-1}e\|_\infty \leq C$

mit Lemma 1.8: $\|A^{-1}\| \leq C$ ∎

Theorem umfasst unseren Fall, denn

$$-A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & -1 & \\ -1 & 4 & -1 & & -1 \\ & & \ddots & & \end{bmatrix}$$ ist L_0-Matrix, und $p_k = P(X_{j^{-1}(k)})$

erfüllt $p \gg 0$ sowie

$-Ap \geq e \gg 0$ $\rightsquigarrow$ $-A$ ist M-Matrix

$\rightsquigarrow$ $\|A^{-1}\| \leq \frac{\max p_i}{\min (-Ap)_i} \leq \max p_i \leq 1/8$

1.8 Schlussbemerkungen

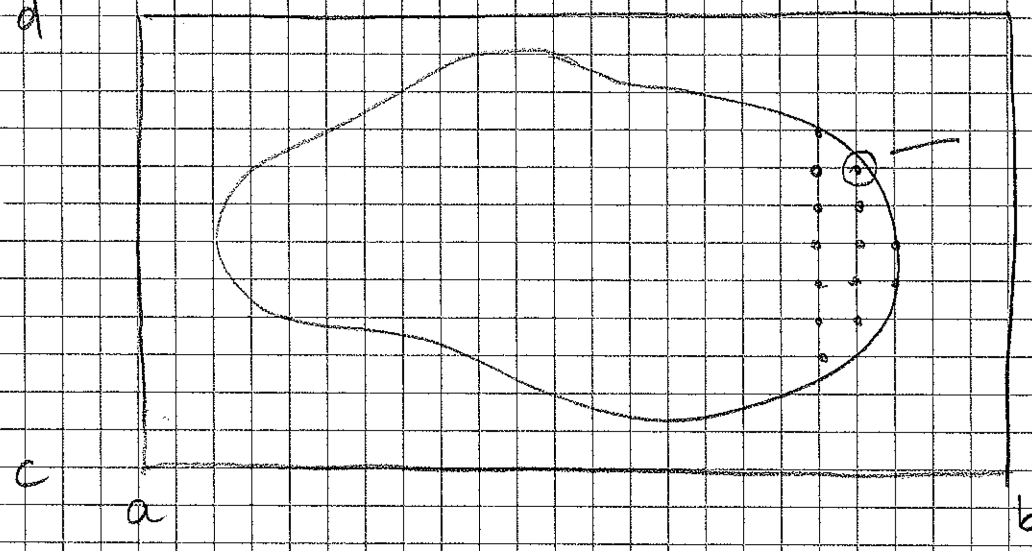
a) diskretes Maximumprinzip ist <u>kein Automatismus</u>

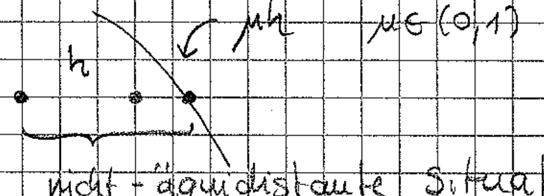
bei Diskretisierung 4ter Ordnung ergibt sich ein Stern für $-\Delta$ der Form

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & & \frac{1}{12} & & \\ & & -\frac{4}{3} & & \\ \frac{1}{12} & -\frac{4}{3} & +5 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{12} \\ & & -\frac{4}{3} & & \\ & & \frac{1}{12} & & \end{bmatrix}$$

Max-Prinzip (L_0-Eigenschaft) gilt <u>nicht</u> wegen falschem Vorzeichen!

b) Diskretisierung bei krummlinigen Rändern





$\mu \in (0,1)$

nicht-äquidistante Situation

Stern für $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$: $\frac{1}{h^2}\left[\frac{2}{1+\mu} \quad -\frac{2}{\mu} \quad \frac{2}{\mu(1+\mu)}\right]$

- gute Vorzeichen!
- Approximationsordnung 1

Konvergenzbeweis:
- multipliziere Gleichungen zu randnahen Punkten mit h

  $\rightsquigarrow \quad \| E(u) \| = O(h^2)$ trotz Approx.ordnung 1 am Rand

- resultierende Matrix ist L_0-Matrix
- nutze $P(x,y) = (x-a)(b-x) + (y-c)(d-y)$ zum Nachweis der M-Matrix Eigenschaft mit Satz 1.12.

c) typischer Finite Differenz - Nachteil im Konvergenzbeweis:

hohe Regularität der Lösung wird benötigt.

zB. nicht anwendbar im Fall $\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } (0,1)^2 \\ u = 0 & \text{auf } \partial(0,1)^2 \end{cases}$

denn $u \notin C^2(\overline{\Omega})$

$\Big[$ Wäre $u \in C^2(\overline{\Omega})$ dann auch $-1 = \Delta u(0,0) = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(0,0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(0,0)}_{=0} = 0$ ↯ $\Big]$

wegen Stetigkeit der 2ten Ableitungen

wegen RB