Kapitel 3: Die Finite Elemente Methode

3.1: Vorbemerkung

FEM ist Lösungsansatz für schwache Formulierungen von PDG z.B.
z.B. im Fall linearer PDG

$$(W) \quad \left[\text{Finde } u \in V, \text{ so dass } \quad a(u,v) = b(v) \quad \text{für alle } v \in V \right]$$

wobei V: Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|$

$b \in V'$ stetige Linearform

$a: V \times V \to \mathbb{R}$ stetige, koerzive Bilinearform

$|a(v,w)| \leq C \|v\| \|w\|$ $\qquad$ $a(v,v) \geq c \|v\|^2 \quad c>0$

Satz von Lax-Milgram zeigt: (W) hat genau eine Lösung

1) Diskretisierung von (W):

Wähle <u>endlichdimensionalen</u> Teilraum $V_h \subset V$ und löse

(W_h) $\left[\text{ Finde } u_h \in V_h \text{, so dass } a(u_h, v_h) = b(v_h) \text{ für alle } v_h \in V_h \right]$

Bem: Lax-Milgram auf V_h zeigt Existenz eindeutiger Lösung!

Umwandlung in LGS durch Basiswahl:

Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ Basis von V_h. Dann gilt

Lemma 3.1: $u_h = \sum_{i=1}^{N} \xi_i \varphi_i$ ist Lösung von W_h genau dann, wenn

$A\xi = \beta$ gilt mit $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ und $\beta_i = b(\varphi_i)$

für $i,j = 1, \dots, N$

Beweis: Sei $u_h = \sum \xi_j \varphi_j$ Lösung von W_h. Für die spezielle Wahl $v_h = \varphi_i$ folgt

$$\beta_i = b(\varphi_i) = a(u_h, \varphi_i) = \sum \xi_j \, a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum \xi_j A_{ij} = (A\xi)_i \quad \checkmark$$

Sei umgekehrt ξ Lösung von $A\xi = \beta$ und $u_h := \sum \xi_j \varphi_j$

Sei $v_h = \sum \eta_i \varphi_i \in V_h$ beliebig. Dann gilt

$$a(u_h, v_h) = \sum_i \sum_j a(\varphi_j, \varphi_i)\, \eta_i \xi_j = \eta^T A \xi$$

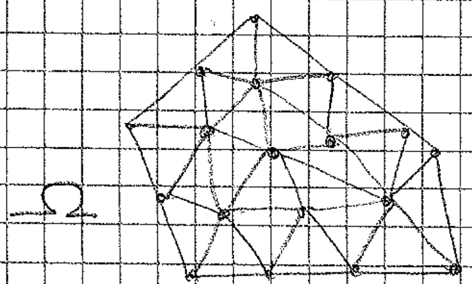
$$b(v_h) = \sum_i b(\varphi_i)\, \eta_i = \eta^T \beta$$

also $\quad a(u_h, v_h) - b(v_h) = \eta^T (A\xi - \beta) = 0 \qquad \blacksquare$

Bem: A ist invertierbar, da (W_h) eindeutig lösbar

Besonderheit von FEM: Konstruktion der Räume V_h

z.B. bei polygonalen Gebieten



1) Triangulierung $\hat{=}$ Zerlegung in polyg. Teilgebiete T_k

2) $\varphi_i|_{T_k} \hat{=}$ einfache Funktion (z.B. Polynom)

3) $\varphi_i|_{T_k} = 0$ für möglichst viele k (kleiner Träger)

4) Verhalten auf ∂T_k so, dass $\varphi_i \in V$.

bei typischer Bilinearform $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx$

(1) $\Rightarrow$ $A_{ij} = \sum \int_{T_k} \nabla \varphi_j(x) \cdot \nabla \varphi_i(x)\, dx$

sehr oft $= 0$ wegen (3) $\Rightarrow$ A dünn besetzt!

wegen (2) analytische Integration möglich

Matrixaufbau durch Schleife über Teilgebiete

3.2 Modellproblem

Ausgangspunkt: starke Formulierung

Finde $u \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$ so dass

$$(S) \begin{cases} -u''(x) + \alpha u(x) = g(x) & x \in (0,1) \\ u(0) = \gamma_0 \\ u'(1) = \gamma_1 \end{cases}$$

mit $\alpha \geq 0$.

- multipliziere (S) mit v, $v(0) = 0$ und integriere

$$-\int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx + \alpha \int_0^1 u(x) v(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, v(x)\, dx$$

- partielle Integration

$$-\int u'' v\, dx = -[u' v]_0^1 + \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = -\gamma_1 v(1) + \int_0^1 u' v'\, dx$$

$$a(u,v) := \int_0^1 u'v' + \alpha u v \, dx$$

$$d(v) := \gamma_1 v(1) + \int_0^1 g(x) v(x) \, dx$$

$v \in V := \{ w \in H^1(0,1) \mid w(0) = 0 \}$

und $u \in \bar{u} + V$, wobei $\bar{u} \in H^1(0,1)$ mit $\bar{u}(0) = \gamma_0$ beliebig

ergibt Umformulierung:

Finde $u \in \bar{u} + V$ so dass $a(u,v) = d(v)$ für alle $v \in V$

bzw kanonische schwache Formulierung für $w = u - \bar{u}$

(W) Finde $w \in V$ mit $a(w,v) = b(v)$ für alle $v \in V$

mit $b(v) = d(v) - a(\bar{u}, v)$

Bedingungen von Lax-Milgram erfüllt?

Wir nutzen Vorwissen über H^1:

Satz und Definition 3.2:

- $H^1(0,1)$ ist ein Teilraum von $\mathbb{L}^2(0,1)$
- $u \in \mathbb{L}^2(0,1)$ ist in $H^1(0,1)$ g.d.w. es eine Funktion $w \in \mathbb{L}^2(0,1)$ gibt die $\langle u, \varphi' \rangle_{\mathbb{L}^2} = -\langle w, \varphi \rangle_{\mathbb{L}^2}$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ erfüllt
- Für $u \in H^1(0,1)$ ist die Fkt w eindeutig bestimmt und wird mit u' bezeichnet
- $\langle u, v \rangle_{H^1} := \langle u', v' \rangle_{\mathbb{L}^2} + \langle u, v \rangle_{\mathbb{L}^2}$ ist ein Skalarprodukt auf H^1 und H^1 damit ein Hilbertraum.
- Jedes $u \in H^1(0,1)$ ist Grenzwert einer Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n \in C^\infty([0,1])$ in H^1.

Lemma 3.3 Zu jedem $\bar{x} \in [0,1]$ existiert ein eindeutiges $\delta_{\bar{x}} \in H^1(0,1)'$ das für jedes $u \in H^1(0,1) \cap C^1([0,1])$ der Punktauswertung $\delta_{\bar{x}}(u) = u(\bar{x})$ entspricht.

Beweis: Eindeutigkeit: Ann Λ_1, Λ_2 sind zwei solche Funktionale und $u \in H^1(0,1)$ dann $u = \lim u_n$ mit $u_n \in C^1([0,1])$ und

$$(\Lambda_1 - \Lambda_2)(u) = \lim (\Lambda_1 - \Lambda_2)(u_n) = \lim u_n(\bar{x}) - u_n(\bar{x}) = 0 \quad \text{also } \Lambda_1 = \Lambda_2 \checkmark$$

Existenz:
$$\delta_{\bar{x}}(u) = \int_0^1 u(x)\,dx + \int_0^1 x\,u'(x)\,dx - \int_{\bar{x}}^1 u'(x)\,dx \qquad \text{Linearität} \checkmark$$

mit CS:
$$|\delta_{\bar{x}}(u)| \le \|1\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + \|x\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} + \|1\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} \le C \|u\|_{H^1}$$

also $\delta_{\bar{x}} \in H^1(0,1)'$ und für glattes u mit partieller Integration und HS

$$\delta_{\bar{x}}(u) = \int_0^1 u(x)\,dx + [x\,u(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)\,dx - [u(x)]_{\bar{x}}^1$$
$$= u(1) - u(1) + u(\bar{x}) = u(\bar{x})$$

$\blacksquare$

Damit: $V = \{ w \in H^1(0,1) \mid \delta_0(w) = 0 \}$ abgeschlossener TR von $H^1(0,1)$

also auch HR mit $\langle \, , \rangle_{H^1}$

$$|a(u,v)| = \left| \int_0^1 u'v' + \alpha u v \, dx \right| \underset{C.S}{\leq} \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \alpha \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

Lemma 3.4 Auf V gilt $a(u,u) \geq c \|u\|_{H^1}^2$ mit $c = \min\{1, \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\alpha\}$

Beweis: Für $u \in C^1([0,1])$ gilt

$$u^2(x) = u^2(0) + \int_0^x [u^2(s)]' \, ds = u^2(0) + \int_0^x 2u(s)u'(s) \, ds \underset{C.S}{\leq} u^2(0) + 2\|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2}$$

Sei nun $0 \neq u \in V$ dann gibt es $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \in C^1([0,1])$, $u = \lim u_n$

also $\|u\|_{L^2}^2 = \lim_{n \to \infty} \|u_n\|_{L^2}^2 \leq \lim_{n \to \infty} \left[(\delta_0(u_n))^2 + 2\|u_n\|_{L^2} \|u_n'\|_{L^2} \right] = 2 \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2}$

d.h. $\|u\|_{L^2} \leq 2 \|u'\|_{L^2}$

damit: $\quad a(u,u) = \|u'\|_{L^2}^2 + \alpha \|u\|_{L^2}^2$

für $1 \geq \eta > 0$ $\quad = \eta \|u'\|_{L^2}^2 + (1-\eta)\|u'\|_{L^2}^2 + \alpha \|u\|_{L^2}^2$

$$\geq \eta \|u'\|_{L^2} + \left(\frac{1-\eta}{4} + \alpha\right) \|u\|_{L^2}^2$$

$$= c \|u\|_{H^1}^2$$

wenn $\quad c = \eta = \left(\frac{1-\eta}{4} + \alpha\right) \quad$ d.h. $\quad {}^5/_4\, \eta = {}^1/_4 + \alpha \quad$ d.h. $\quad \eta = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\alpha \quad \alpha \leq 1$

$\eta = 1 \quad$ falls $\alpha > 1$ $\boxed{}$

Außerdem ist $b \in V'$, denn

$$|b(v)| \leq |\gamma_1 \delta_1(v)| + \left|\int_0^1 g\, v\, dx\right| + |a(\bar{u},v)|$$

$$\leq |\gamma_1| \, \|\delta_1\| \, \|v\|_{H^1} + \|g\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + C \|\bar{u}\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \leq \tilde{C} \|v\|_{H^1} \checkmark$$

$\Rightarrow$ Alle Bedingungen von Lax-Milgram erfüllt.