3.3 FEM-Räume für das Modellproblem

3.1(1) "Triangulierung" von $\Omega = (0,1)$

wähle Punkte $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = 1$

Teilgebiete: $T_k = [x_{k-1}, x_k] \quad k = 1, \ldots, M$

3.1(2) auf T_k sollen Funktionen aus V_h Polynome vom Grad $\leq t$ sein

d.h. aus $\mathcal{P}_t = \{x \mapsto \sum_{i=0}^{t} c_i x^i \mid c_i \in \mathbb{R}\}$ (sog. $\mathcal{P}_t$-Elemente)

beachte: bei stetiger Verbindung an den Teilintervallgrenzen ergeben sich H^1-Funktionen (siehe Pkt 3.1(4))

Lemma 3.5 Sei $f \in C^0([0,1])$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1$ und $T_k = [x_{k-1}, x_k]$ $k=1,\dots,M$.
Ist $f|_{T_k} \in C^1(T_k)$, dann ist $f \in H^1(0,1)$ und $f'(x) = \begin{cases} (f|_{T_k})'(x) & x \in \mathring{T}_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis: Da $C^0([0,1]) \subset \mathbb{L}^2(0,1)$ brauchen wir nur $w \in \mathbb{L}^2(0,1)$ finden mit

$$\langle f, \varphi' \rangle = - \langle w, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,1).$$

Nimm punktweise Ableitung:

$$w(x) := \begin{cases} (f|_{T_k})'(x) & x \in (x_{k-1}, x_k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wegen Beschränktheit stückweise Stetigkeit: $w \in \mathbb{L}^2(0,1)$

außerdem:

$$\langle f, \varphi' \rangle = \sum_{k=1}^{M} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \varphi' \, dx = \sum_{k=1}^{M} \left([f|_{T_k} \varphi]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f|_{T_k})'(x) \, \varphi(x) \, dx \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \left(f|_{T_k}(x_k) \varphi(x_k) - f|_{T_k}(x_{k-1}) \varphi(x_{k-1}) \right) - \langle w, \varphi \rangle$$

Da φ komp Träger in $(0,1)$ ist $\varphi(x_0) = 0 = \varphi(x_M)$ und $f|_{T_k}(x_k) = f(x_k)$ wegen Stetigkeit

$$= \sum_{k=1}^{M-1} f(x_k)\varphi(x_k) - \sum_{k=0}^{M-1} f(x_k)\varphi(x_k) - \langle w, \varphi \rangle = -\langle w, \varphi \rangle \qquad \blacksquare$$

Wir erhalten also einen Teilraum von $H^1(0,1)$ durch:

$$H^1_\Delta := \{ \varphi \in H^1(0,1) \mid \varphi \in C^0([0,1]),\ \varphi|_{T_k} \in \mathbb{P}_t \ \ k = 1, \dots, M \} \qquad t \geq 1$$

Welche Dimension hat H^1_Δ ?

(FEM-Sprache: wieviele Freiheitsgrade hat H^1_Δ ?)

P_t hat Dimension $t+1$

stückweise P_t hat Dimension $M \cdot (t+1)$

stückweise P_t und stetig hat Dimension $M(t+1) - \underbrace{(M-1)}_{\text{an jedem inneren Punkt eine Bedingung}} = Mt + 1$

erwarte $\dim H^1_\Delta = Mt + 1$

Basis ?

Füge in jedem Intervall T_k $t-1$ Stützstellen $x_{k-1} < y_{k1} < \dots < y_{k\,t-1} < x_k$ hinzu

Mit den x_k ergeben sich so $M+1 + M(t-1) = Mt+1$ Stützstellen $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{Mt} = 1$

zu jedem Punkt gibt es Auswertefunktional δ_{s_i}

und damit $\delta : H^1_\Delta \longrightarrow \mathbb{R}^{Mt+1}$ Auswertung an allen Stützstellen

$u \longmapsto (\delta_{s_0}(u), \dots, \delta_{s_{Mt}}(u))$

Lemma 3.6: Die Abbildung δ ist ein Isomorphismus und damit $\dim H^1_\Delta = Mt+1$. Die Funktionen $\varphi_i = \delta^{-1}(e_i)$ heißen <u>nodale</u> <u>Basisfunktionen</u>. Sie erfüllen $\varphi_i(s_j) = \delta_{ij}$

Beweis: Injektivität: sei $\delta(u) = 0$ für ein $u \in H^1_\Delta$

dann gilt $u(x_{k-1}) = u(y_{k1}) = \dots = u(y_{k\,t-1}) = u(x_k) = 0$

da $u|_{T_k} \in P_t$ folgt $u|_{T_k} = 0$ für alle k also $u = 0$ ✓

Surjektivität: Sei $l \in \{0, \dots, Mt\}$

und $K := \{ k \mid s_l \in T_k \}$

Fall $K = \{k\}$: Es gibt $P \in \mathcal{P}_t$ mit $P(s_\ell) = 1$, $P(s_j) = 0$ für $s_j \in T_k$, $j \neq \ell$

(Lagrange Grundpolynom!)

Definiere $\varphi_\ell(x) = \begin{cases} P(x) & x \in T_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ dann $\varphi_\ell \in H^1_\Delta$ und $\delta(\varphi_\ell) = e_\ell$

Fall $K = \{k, k+1\}$: hier ist $s_\ell = x_k$

konstruiere P^+ wie oben auf T_{k+1}

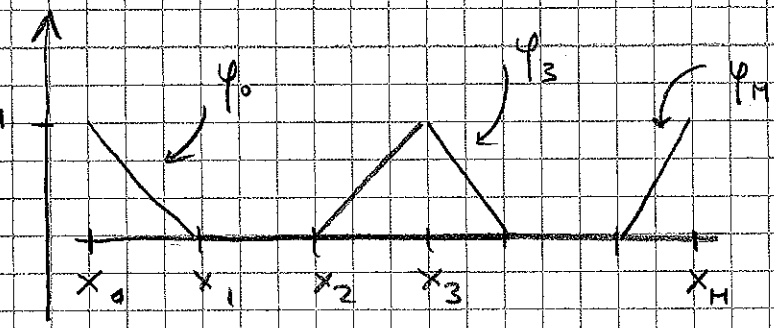
P^- wie oben auf T_k

Definiere $\varphi_\ell(x) = \begin{cases} P^-(x) & x \in T_k \\ P^+(x) & x \in T_{k+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $\varphi_\ell \in H^1_\Delta$ und $\delta(\varphi_\ell) = e_\ell$

Damit Bild $\delta = \mathbb{R}^{Mt+1}$ $\blacksquare$

Beispiel: P_1 - Elemente

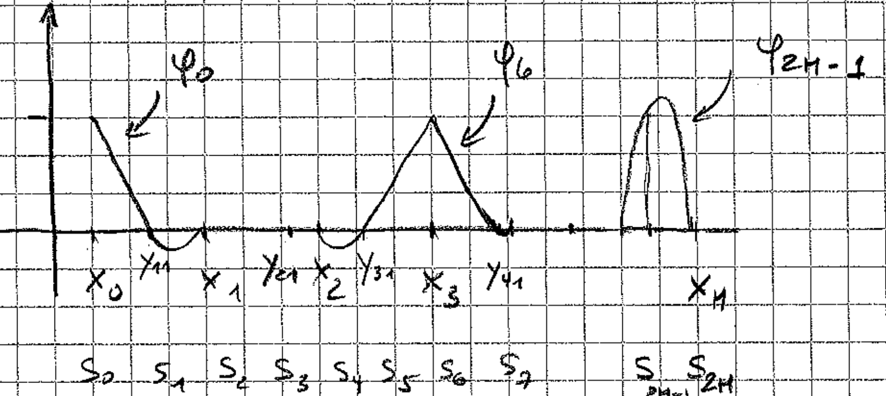
(stückweise linear)



stückweise Lagrange-Grundpolynome

Beispiel: P_2 - Elemente

(stückweise quadratisch)



3.4. Assemblierung des Modellproblems

"Aufbau"

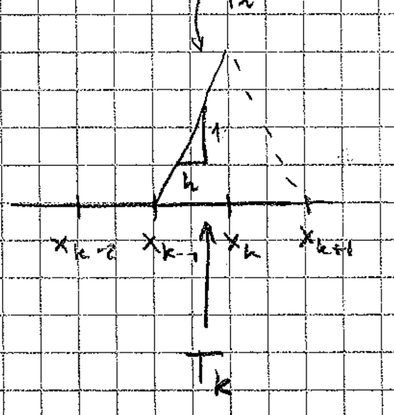
Annahme: $x_i = ih$, $h = \frac{1}{M}$ äquidistant, $\alpha = 0$

brauche $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi_j'(x)\, \varphi_i'(x)\, dx$ (sog. Steifigkeitsmatrix $\hat{=}$ Matrix zur Bilinearform)

stückweise konstant (Lemma 3.5)

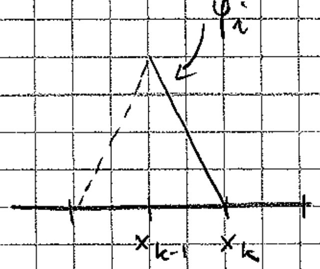
$$= \sum_{k=1}^{M} \underbrace{\int_{T_k} \varphi_j'(x)\, \varphi_i'(x)\, dx}_{A_{ij}^{(k)}}$$

$i = j = k$



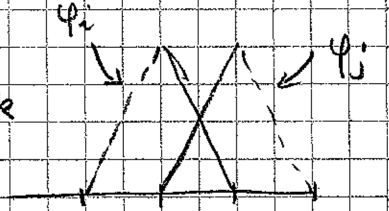
$$A_{ij}^{(k)} = \int_{T_k} (\varphi_i'(x))^2\, dx = h \cdot \left(\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{1}{h}$$

$i = j = k-1$



$A_{ij}^{(k)} = 1/h$

$i = k-1 \quad j = k$



$A_{ij}^{(k)} = h \cdot \left(-1/h\right) \cdot h = -1/h$

$i = k \quad j = k-1$

$A_{ij}^{(k)} = -1/h$

$|i-k| > 1 \vee |j-k| > 1$

$A_{ij}^{(k)} = 0$

typischer Aufbauprozess (besonders bei dim > 1)

Schleife über Elemente T_k

{

in jedem Element T_k, Bilinearform für alle Lagrange-Grundpolynom-Paare ausrechnen

Ergebnisse in Indexvektoren speichern

$I = [I; k; k-1; k-1; k]$

$J = [J; k; k-1; k; k-1]$

$V = [V; 1/h; 1/h; -1/h; -1/h]$

}

Dünn besetzte Matrix bauen: $A = \text{sparse}(I, J, V, Mt+1, Mt+1)$

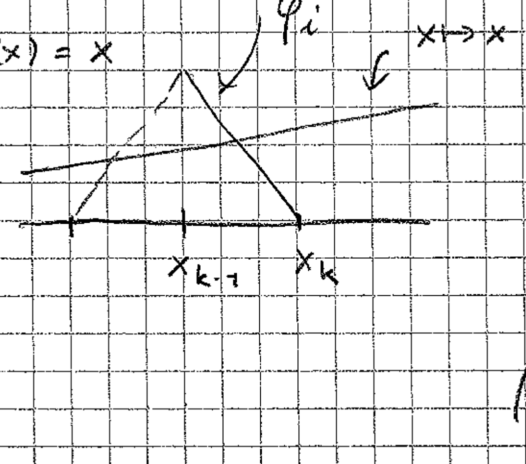
<u>Ende</u>

brauche $\beta_i = b(\varphi_i) = \gamma_1 \underbrace{\varphi_i(1)}_{=\delta_{iM}} + \underbrace{\int_0^1 g(x)\varphi_i(x)\,dx}_{= \sum_{k=1}^{M} \underbrace{\int_{T_k} g(x)\varphi_i(x)\,dx}_{=\beta_i^{(k)}}} - \underbrace{a(\bar{u}, \varphi_i)}_{=0 \text{ wenn } \bar{u}(x) = \gamma_0,\ \alpha = 0}$

theoretisch benötigt: exaktes Integral

praktisch benutze Integralapproximation mit genauer Quadraturformel (Zusatzfehler!)

hier: $g(x) = x$



$$\beta_i^{(k)} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} x \cdot \left(-\frac{1}{h}\right)(x - x_k)\,dx = -\frac{1}{h}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 x_k\right]_{x_{k-1}}^{x_k}$$

$i = k$

$$\beta_i^{(k)} = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 x_{k-1}\right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \gamma_1 \delta_{kM}$$

Definiere β als Nullvektor

Schleife über Elemente T_k

{

  berechne $[\beta_{k-1}^{(k)} ; \beta_k^{(k)}]$

  addiere zu $\beta([k-1 ; k])$

}

Bemerkungen

1) bei $\int_0^1 \gamma(x)\, u'(x)\, v'(x)\, dx$ auch numerische Integration für A-Berechnung erforderlich

2) Trick: arbeite immer mit Gauß-Quadratur genügend hoher Ordnung auf T_k

$\Rightarrow$ Integrale werden exakt (wenn Polynome passenden Grad haben)

(Handintegration entfällt)