# 3.5 Konvergenz der FEM - Lösung

Sei zunächst $a$ <u>symmetrisch</u> und LM - Bedingungen erfüllt

Dann ist $a : V \times V \to \mathbb{R}$ ein SP auf $V$; wir schreiben $\langle u, v \rangle_a := a(u,v)$

Lsg $u$ von $(W)$ : $\langle u, v \rangle_a = b(v)$ für alle $v \in V$

Lsg $u_h$ von $(W_h)$ : $\langle u_h, v_h \rangle_a = b(v_h)$ für alle $v_h \in V_h$

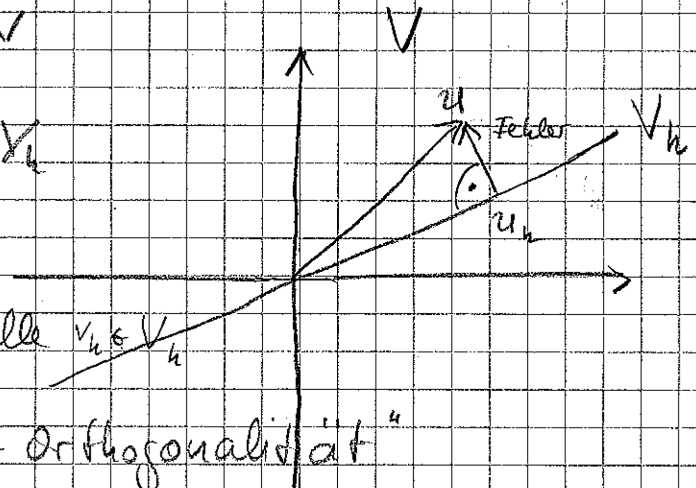
$$\Downarrow$$

$$\langle u - u_h, v_h \rangle_a = b(v_h) - b(v_h) = 0 \quad \text{für alle } v_h \in V_h$$

$$e_h = u - u_h \in V_h^{\perp_a}$$

„Galerkin - Orthogonalität"

(Fehler steht senkrecht auf $V_h$, $u_h$ ist Projektion von $u$ in $V_h$)




und $\| u - u_h \|_a \leq \| u - w \|_a$ für alle $w \in V_h$ Projektion ist Bestapproximation

bzw $\| e_h \|_a = \min_{w \in V_h} \| u - w \|_a =: \mathrm{dist}_a(u, V_h)$

Abschätzung dieses Typs gilt allgemein!

**Satz 3.7** (Céa Lemma)
Für das Problem (W) seien die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt und seien $u, u_h$ die Lösungen von (W), $(W_h)$. Dann gibt es eine Konstante $K$ so dass
$$\|u - u_h\|_V \le K \, \mathrm{dist}_V(u, V_h)$$

Beweis: Wegen
$$a(u, v_h) = b(v_h)$$
$$a(u_h, v_h) = b(v_h) \qquad v_h \in V_h$$

Achtung $a(\cdot,\cdot)$ kein SP wenn unsymmetrisch

$$\Rightarrow \quad a(u - u_h, v_h) = 0 \qquad \text{Galerkin – „Orthogonalität"} \quad \text{(GO)}$$

Sei $w \in V_h$

$$c \|u - u_h\|_V^2 \overset{\text{Koerzivität}}{\le} a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - w) + \overbrace{a(u - u_h, \underbrace{w - u_h}_{\in V_h})}^{\overset{(GO)}{=} 0}$$

$$\overset{\text{Stetigkeit}}{\le} C \|u - u_h\|_V \|u - w\|_V$$

$$\Rightarrow \quad \|u - u_h\|_V \le \frac{C}{c} \|u - w\|_V \quad \text{für alle } w \in V_h$$

also $\|u - u_h\|_V \le K \, \mathrm{dist}_V(u, V_h)$ ∎

Ist $(V_{h_n})_{n \in \mathbb{N}}$ Sequenz von FEM-Räumen mit der Eigenschaft

$$\forall f \in V : \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(f, V_{h_n}) = 0$$

dann konvergiert die Lösung von $(W_{h_n})$ gegen die Lösung von $(W)$

denn $\lim_{n\to\infty} \|e_{h_n}\|_V \leq K \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}_V(u, V_{h_n}) = 0$

gilt sogar $\operatorname{dist}_V(u, V_{h_n}) \leq C\, h_n^p$

dann ist Konvergenz von Ordnung $p$: $\|e_{h_n}\|_V \leq K\, h_n^p$

Konvergenzfrage wird zur reinen <u>Approximationsfrage</u>:

wie gut lässt sich $u \in V$ durch Elemente von $V_h$ approximieren?

## Ein Approximationsresultat für Polynominterpolation

**Lemma 3.8.** Sei $u \in C^\infty([0,1])$, $t \geq 1$, $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_t = 1$ und $P[u] \in \mathcal{P}_t$ das eindeutige Lagrange Interpolationspolynom zu $(\sigma_i, u(\sigma_i))$ $i = 0, \dots, t$. Dann gilt für jedes $m \leq t$

$$|u - P[u]|_{H^m} \leq |u|_{H^{t+1}} \quad \text{und} \quad \|u - P[u]\|_{H^m} \leq \sqrt{m+1}\, |u|_{H^{t+1}}$$

wobei $|u|_{H^k} = \|u^{(k)}\|_{L^2}$ und $\|u\|_{H^k} = \sqrt{\sum_{j \leq k} \|u^{(j)}\|_{L^2}^2}$

Beweis: $\Delta := u - P[u]$ hat $t+1$ Nullstellen

$\Delta'$ hat $t$ Nullstellen (Rolle)

$\vdots$

$\Delta^{(t)}$ hat $1$ Nullstelle (Rolle)

$\Delta^{(t+1)} = u^{(t+1)}$

Sei $\xi_j$ Nullstelle von $\Delta^{(j)}$ für $j \leq t$

Hauptsatz : $\Delta^{(t)}(x) = \int_{\xi_t}^{x} \Delta^{(t+1)}(s)\,ds$ also $|\Delta^{(t)}(x)| \leq \int_0^1 |u^{(t+1)}(s)|\,ds \overset{CS}{\leq} |u|_{H^{t+1}}$

Hauptsatz $\Delta^{(t-1)}(x) = \int_{\xi_{t-1}}^{x} \Delta^{(t)}(s)\,ds$ also $|\Delta^{(t-1)}(x)| \leq |u|_{H^{t+1}}$

$\vdots$

damit $\|\Delta^{(j)}\|_{L^2} \leq |u|_{H^{t+1}} \qquad 0 \leq j \leq t$

also $\|\Delta\|_{H^m}^2 = \sum_{j \leq m} \|\Delta^{(j)}\|_{L^2}^2 \leq (m+1)\,|u|_{H^{t+1}}^2$ ▨

Ein Approximationsresultat für unseren Modellfall:

Lemma 3.9: Sei $u \in C^\infty([0,1])$ und $V_h$ sei konstruiert mit $P_t$-Elementen wie in Abschnitt 3.3 für $t \geq 1$. Ist $u(0)=0$ dann gilt

$$\operatorname{dist}_V(u, V_h) \leq \sqrt{2}\, h^t\, |u|_{H^{t+1}}$$

Beweis: wir setzen $I_h[u] := \sum_{i=0}^{Mt} u(s_i)\, \varphi_i \in V_h$ "Interpolationsoperator"

$\varphi_i = S^{-1}(e_i)$ (siehe 3.3)

$$\| u - I_h[u] \|_V^2 = \sum_{k=1}^{M} \| u - I_h(u) \|^2_{H^1(T_k)}$$

Transformation von $T_k$ auf Referenzintervall $[0,1]$ durch

$F(y) = x_{k-1} + h y$ $\qquad \hat{u} := u \circ F$

damit $\hat{u}' = h u' \circ F$

allgemein $\hat{u}^{(j)} = h^j u^{(j)} \circ F$

Für den Interpolationsoperator gilt:

$$I_h[u] \circ F = \sum_{i=0}^{Mt} u(s_i) \underbrace{\varphi_i \circ F}_{=:\hat{\varphi}_i} = \sum_{i \in A} \hat{u}(\underset{\substack{\| \\ F^{-1}(s_i)}}{\hat{s}_i}) \hat{\varphi}_i \qquad \text{wobei } A = \{ j \mid s_j \in T_k \}$$

beachte $|A| = t+1$

außerdem: $\hat{\varphi}_i \in P_t \qquad \hat{\varphi}_i(\hat{s}_j) = \delta_{ij}$ damit $I_h[u] \circ F = P[\hat{u}]$

Interpolationspolynom zu $(\hat{s}_j, \hat{u}(\hat{s}_j))_{j \in A}$

! ~~nur braucht man~~ $u(0)=0$! damit Aussage auch in $T_1$ gilt

wie bei $\hat{u}$: $P[\hat{u}]^{(j)} = h^j \, I_h[u]^{(j)} \circ F$

damit $\Delta^{(j)} \circ F = \frac{1}{h^j} \hat{\Delta}^{(j)}$ mit $\hat{\Delta} := \hat{u} - P[\hat{u}]$

$\Delta := u - I_h[u]$

$$|\Delta|^2_{H^j(T_k)} = \int_{F([0,1])} (\Delta^{(j)}(x))^2 \, dx = \int_0^1 ((\Delta^{(j)} \circ F)(y))^2 |F'(y)| \, dy = h \cdot \frac{1}{h^{2j}} \int_0^1 (\hat{\Delta}^{(j)}(y))^2 \, dy$$

$$= h^{1-2j} |\hat{\Delta}|_{H^j(0,1)} \underset{\text{Lemma 3.8}}{\leq} h^{1-2j} |\hat{u}|_{H^{t+1}} = \frac{h^{1-2j}}{h^{1-2(t+1)}} h^{1-2(t+1)} \int_0^1 |\hat{u}(y)|^2 \, dy \underset{\text{Trafo rückwärts}}{=} h^{2(t-j+1)} |u|^2_{H^{t+1}(T_k)}$$

damit $\quad \| u - I_h[u] \|^2_{H^1(T_h)} \leq \left( h^{2(t+1)} + h^{2t} \right) |u|^2_{H^{t+1}(T_h)}$

$$= \underbrace{(1 + \underbrace{h^2}_{\leq 1})}_{\leq 2} h^{2t} |u|^2_{H^{t+1}(T_h)}$$

also $\quad \| u - I_h[u] \|^2_V \leq 2 h^{2t} |u|^2_{H^{t+1}}$

und $\quad \mathrm{dist}_V(u, V_h) = \inf_{w \in V_h} \| u - w \|_V \leq \| u - \underbrace{I_h[u]}_{\in V_h} \|_V \leq \sqrt{2}\, h^t |u|_{H^{t+1}} \quad \blacksquare$

**Satz 3.10** Sei $V_h$ konstruiert mit $P_t$-Elementen wie in Abschnitt 3.3 für $t \geq 1$

Für $u \in V \cap H^{t+1}(0,1)$ gilt

$$\operatorname{dist}_V(u, V_h) \leq \sqrt{2}\, h^t\, |u|_{H^{t+1}}$$

Ist $u \in V$ und $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{dist}_V(u, V_{h_n}) = 0$$

**Beweis:** Zunächst gilt $\| I_h(u) \|_V \leq \sum_{i=0}^{Mt} |\delta_{s_i}(u)|\, \|\varphi_i\|_V \leq \left( \sum_{i=0}^{Mt} \|\delta_{s_i}\|\, \|\varphi_i\|_V \right) \|u\|_V$

also ist $I_h : V \to V_h$ beschränkt

Für $\bar{u} \in C^\infty([0,1])$ folgt weiter

$$\| u - I_h[u] \|_V \leq \| u - \bar{u} \|_V + \| I_h[u - \bar{u}] \|_V + |\bar{u}(0)| + \| \bar{u} - \bar{u}(0) - I_h[\bar{u} - \bar{u}(0)] \|_V$$

$$\leq (1 + \|I_h\| + \|\delta_0\|)\, \|u - \bar{u}\|_V + \sqrt{2}\, h^t\, |\bar{u}|_{H^{t+1}}$$

wenn $u \in H^{t+1}$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\bar{u} \in C^\infty([0,1])$ mit $\|u - \bar{u}\|_{H^{t+1}} < \varepsilon$

also $\|u - \underbrace{I_h(u)}_{\in V_h}\|_V \leq (1 + \|I_h\| + \|S_0\|)\, \|u - \bar{u}\|_{H^1} + \sqrt{2}\, h^t\, |u - \bar{u}|_{H^{t+1}} + \sqrt{2}\, h^t\, |u|_{H^{t+1}}$

$\leq \sqrt{2}\, h^t\, |u|_{H^{t+1}} + K\varepsilon$

damit $\operatorname{dist}_V(u, V_h) \leq \sqrt{2}\, h^t\, |u|_{H^{t+1}}$

wenn $u \in H^1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\bar{u} \in C^\infty([0,1])$ mit $\|u - \bar{u}\|_V < \varepsilon$

und $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2}\, h_n^t\, |\bar{u}|_{H^{t+1}} < \varepsilon$ wenn $n \geq N$

also $\|u - \underbrace{I_{h_n}(u)}_{\in V_{h_n}}\|_V \leq K\varepsilon$ wenn $n \geq N$

also $\operatorname{dist}_V(u, V_{h_n}) \leq K\varepsilon$ wenn $n \geq N$ $\boxtimes$

Ergebnis:
- FEM-Methode liefert konvergente Approximationsfolge für unser Modellproblem.
- Hat die Lösung des Modellproblems mehr Regularität als $H^1$ dann lässt sich eine Konvergenzordnung angeben die maximal $t$ ist bei $P_t$-Elementen.