Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk

Ausgabe: 01. Nov., WS 2007/08
Übung: 15. Nov. 16-18h, D435

Numerik stochastischer Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, X_2, X_3, \dots$ eine Folge von unabhängigen, reellen Zufallsvariablen, deren Verteilung jeweils durch die Gleichverteilung auf $[0, 1]$

$$P_{X_n}(B) = \int_B \mathbf{1}_{[0,1]}(t)\, dt, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

gegeben ist. Die Auswertung $X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), \dots$ in einem Punkt $\omega \in \Omega$ wird als Folge von *Zufallszahlen* bezeichnet. Als Modell für eine solche Folge wird in Matlab der Befehl **rand** bereitgestellt, wobei der Aufruf von **rand** jeweils die nächste Zahl aus der Folge liefert. Durch den Befehl **rand(n,m)** werden entsprechend die nächsten nm Folgenglieder angeordnet in Form einer $n \times m$ Matrix zurückgegeben. Die mit dem Algorithmus **rand** erzeugten Zahlen werden auch als *Pseudo*zufallszahlen bezeichnet, da sie ähnliche Eigenschaften wie Zufallszahlen besitzen.

Aufgabe 1: Varianz und Erwartungswert

Erzeugen Sie mit **rand** eine endliche Folge aus n gleichverteilten Pseudozufallszahlen und berechnen Sie approximativ (für großes n) den Erwartungswert und die Varianz durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Vergleichen Sie mit den exakten Werten.

Aufgabe 2: Münzwurf

Schreiben Sie ein Unterprogramm **bern**, das analog zum Befehl **rand** eine Folge von unabhängigen, $\{-1, 1\}$ wertigen Bernoulli verteilten Zufallszahlen simuliert. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz wie in Aufgabe 1 sowohl approximativ als auch exakt.

Aufgabe 3: Würfel

Schreiben Sie analog zu Aufgabe 2 ein Unterprogramm **dice**, das eine Folge von unabhängigen auf $\{1, \dots, 6\}$ gleichverteilten Zufallszahllen simuliert. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz wie in Aufgabe 1 sowohl approximativ als auch exakt.

Aufgabe 4: Brownsche Bewegung

Für die Simulation der Brownschen Bewegung eines (fast) masselosen mikroskopischen Teilchens wird eine Folge von unabhängigen, zweidimensionalen $N(0, I)$-verteilten Zufallsvektoren $\xi_1, \xi_2, \dots$ benötigt. Entsprechende Pseudozufallsvektoren werden in Matlab durch den Befehl **randn(2,n)** bereitgestellt, wobei die zurückgegebene Matrix in den n Spalten die gewünschten zweidimensionalen Vektoren enthält. Benutzen Sie die in der Vorlesung hergeleitete diskrete Evolutionsgleichung, um eine zweidimensionale Brownsche Bewegung auf dem Zeitintervall [0,1] mit Zeitschritten $\Delta t = 1/N$, $N = 1000$, zu berechnen. Initialisieren Sie die Partikelposition mit dem Nullvektor und zeichnen Sie die Position nach jedem Zeitschritt. Modifizieren Sie das Programm so, dass der gesamte (linear interpolierte) Pfad gezeichnet wird.

Aufgabe 5: Aktienkurs

Die relative Entwicklung des Preises S_n einer Aktie werde annähernd beschrieben durch folgenden diskreten Prozess

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \mu\Delta t + \sigma(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}), \qquad S_0 = 1,$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass der Erwartungswert des Aktienpreises durch

$$E(S_n) = (1 + \mu\Delta t)^n$$

gegeben ist. Simulieren Sie für den Fall $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.4$ die Preisentwicklung mit 10000 Stützstellen auf dem Intervall [0,10]. Zeichnen Sie mehrere Preiskurven in ein gemeinsames Diagramm. Berechnen Sie approximativ den Erwartungswert am Intervallende und vergleichen Sie mit dem theoretischen Wert.