Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk

Ausgabe: 12. Nov., WS 2007/08
Übung: 22. Nov. 16-18h, D435

**Numerik stochastischer Differentialgleichungen**
**Aufgabenblatt 2**

## Aufgabe 1: Statistische Aussage über die Brownsche Bewegung

Wir haben die Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$ als Modell für die Bewegung eines kleinen masselosen Teilchens in einer ruhenden Flüssigkeit hergeleitet. Die mikroskopischen Details, die den genauen Verlauf der Teilchenbahn ausmachen, haben wir dabei (aus Unkenntnis) durch einen stochastischen Prozess ersetzt. Wir können deshalb *nicht* erwarten, eine einzelne Teilchenbahn korrekt vorherzusagen. Wir *können* allerdings erwarten, dass unser Ansatz *statistische* Vorhersagen ermöglicht, die dann auch in der Praxis mit einer größeren Anzahl von Experimenten überprüfbar sind.
Als Beispiel einer solchen statistischen Vorhersage berechnen wir (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass eine eindimensionale Brownsche Bewegung im Zeitintervall $[0,1]$ im Intervall $[-1,1]$ bleibt, d.h. $P(\max_{t\in[0,1]} |W_t| \leq 1)$. Bestimmen Sie dazu die relative Häufigkeit dieses Ereignisses unter einer möglichst großen Zahl von approximativen Brownschen Bewegungen. Überprüfen Sie, ob der gefundene Wert von der gewählten Schrittweite der Brownschen Bewegung abhängt.

In diesem Zusammenhang sind folgende Matlab Befehle nützlich: **cumsum**, **max**, **find** und **length**. Angenommen, die Inkremente der Brownschen Bewegungen sind in einer $M \times N$-Matrix **dw** gespeichert. Die $M$ Pfade erhält man dann durch den Befehl **w = cumsum(dw,2)** bei dem die kumulative Summe über die Spalten gebildet wird. Mit **abs(w)** ermittelt man den Absolutbetrag jedes Eintrags in der Matrix **w**. Schließlich erhält man durch Maximumbildung über die Spalten die maximalen Auslenkungen der Brownschen Bewegungen **p = max(abs(w),[],2)**. Wie im **cumsum** Befehl besagt die 2, dass der Befehl über den zweiten Index (also die Spalten) ausgeführt werden soll. Die Indizes der Komponenten von **p**, die kleiner oder gleich 1 sind findet man dann mit **I = find(p<=1)** und die Anzahl ist **length(I)**, woraus sich die relative Häufigkeit bestimmen lässt. Benutzen Sie die help Seiten von Matlab, um mehr Details über die Befehle zu erfahren.

## Aufgabe 2: Berechnung stochastischer Integrale

Zur approximativen Berechnung der stochastischen Integrale

$$I_t = \int_0^t f(s)\, dW_s, \qquad t \in [0,1]$$

zerlegen Sie das Intervall $[0,1]$ in kleine Teilintervalle der Länge $h$ und approximieren die Funktion $f$ durch eine Treppenfunktion, wobei die Stufenhöhe auf dem Teilintervall $k+1$ durch den Funktionswert am linken Intervallrand $t_k = kh$ gegeben sei. Mit dem in Aufgabe 1 diskutierten Befehl **cumsum** lassen sich Approximationen der Integralwerte $I_{t_k}$ elegant berechnen. Für die Varianz von $I_1$ liefert die Ito-Isometrie den exakten Wert.
Zeichen Sie für die beiden Fälle $f(t) = 2\sin(2\pi t)$ und $f(t) = \exp(3t)$ jeweils einige Pfade von

$I$. Wie spiegelt sich die Funktion $f$ im Pfad wieder? Berechnen sie durch Mittelung über eine große Zahl von Pfaden die Varianz von $I_1$ approximativ und vergleichen sie mit dem exakten Wert.

**Aufgabe 3: Federhantel**

Anstelle eines einzelnen massenlosen Teilchens in einer Flüssigkeit betrachten wir nun zwei Teilchen, die durch Anziehungskräfte zusammengehalten werden. Die diskrete Bewegungsgleichung lautet

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a(y_n - x_n)\Delta t + \sqrt{b\Delta t}\xi_n^{(x)}, \quad x_0 = 0 \\ y_{n+1} &= y_n + a(x_n - y_n)\Delta t + \sqrt{b\Delta t}\xi_n^{(y)}, \quad y_0 = 0 \end{aligned}$$

wobei $\xi_n^{(x)}$ und $\xi_n^{(y)}$ standard normalverteilte unabhängige Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^2$ sind. Erzeugen Sie analog zu Aufgabe 4, Blatt 1 eine Animation der Bewegung, wobei die Verbindungslinie zwischen den Teilchen eingezeichnet werden soll. Studieren Sie die Bedeutung der Parameter $a$ und $b$. Erzeugen Sie ein Diagramm, das den zeitlichen Verlauf des Abstandes zwischen den beiden Teilchen beschreibt. Ergibt sich ein typischer Wert für hinreichend große $n$? Bilden Sie dazu den zeitlichen Mittelwert des Abstandes über eine lange Zeitreihe und untersuchen Sie den Wert in Abhängigkeit von $a$ und $b$. Erweitern Sie das Beispiel auf eine Kette von mehr als zwei Teilchen, wobei sich die Kraft des $i$-ten Teilchen mit Position $x^{(i)}$ auf das Teilchen $i+1$ mit Position $x^{(i+1)}$ gerade durch $a(x^{(i)} - x^{(i+1)})$ gegeben ist.