Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk

Ausgabe: 31. Nov., WS 2007/08
Übung: 06. Dez. 16-18h, G435

Numerik stochastischer Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1: Lineare Kongruenzgeneratoren

In den 1960er Jahren war der Zufallszahlengenerator RANDU von IBM definiert durch die Rekursion $z_{i+1} = (az_i) \mod m$ und $x_i = z_i/m$ mit $a = 2^{16} + 3$ und $m = 2^{31}$. Schreiben Sie ein Matlab Unterprogramm **randu**, das nach der angegebene Rekursion einen Vektor von Pseudozufallszahlen erzeugt. Die Länge des Vektors und der Startwert z_0 sollen als Parameter übergeben werden. Bilden Sie aus den ersten 1000 RANDU Werten Punktepaare (x_1, x_2), (x_3, x_4), etc. und zeichnen Sie diese im Einheitsquadrat. Erfüllt das Ergebnis Ihre Vorstellung einer Gleichverteilung? Wiederholen Sie das Experiment mit den Tripeln (x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5, x_6), ... Betrachten Sie die resultierende Darstellung der Punkte (mit **plot3**) im Einheitswürfel aus verschiedenen Richtungen. Aus welchen Richtungen erkennt man am deutlichsten, dass dis Pseudozufallszahlen offensichtlich keine Gleichverteilung auf dem Einheitswürfel approximieren?

Aufgabe 2: Monte-Carlo Integration

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $P^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{\omega_i}$ eine diskrete Maßapproximation auf $\mathcal{A}$. Der Erwartungswert einer Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ lässt sich dann approximativ durch

$$E(X) = \int_\Omega X\, dP \approx \int_\Omega X\, dP^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X(\omega_i)$$

bestimmen. Sind die Punkte ω_i durch Pseudozufallszahlen gegeben, so nennt man die Approximation *Monte-Carlo Integration*. Berechnen Sie nun das 10-dimensionale Integral

$$I = \int_{[0,1]^{10}} \sum_{i=1}^{10} x_i^2\, dx$$

exakt und ermitteln Sie den Wert approximativ durch Monte-Carlo Integration mit $1 \leq m \leq N = 10000$ Pseudozufallsvektoren. Zeichnen Sie die Approximationen und den exakten Wert, um die Konvergenz für $m \to \infty$ zu kontrollieren.

Aufgabe 3: Exponentialverteilte Pseudozufallszahlen

Erzeugen Sie mit Hilfe der inversen Verteilungsfunktion eine Punktapproximation der Exponentialverteilung zum Parameter $\mu = 1$ (d.h. mit Dichte $f(x) = e^{-x}$). Berechnen Sie damit die Integrale

$$\int_0^\infty \cos(x)e^{-x}\, dx, \qquad \frac{1}{2}\int_{[0,\infty)^5} x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 \exp(-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)\, dx$$

durch Monte-Carlo Integration und vergleichen Sie mit den exakten Werten. Wieviele Punkte brauchen Sie ungefähr in der Maßapproximation, um mit hoher Wahrscheinlichkeit eine Genauigkeit von 10^{-2} bzw 10^{-3} zu erreichen?

Aufgabe 4: Pseudozufallszahlen mit Cauchy-Verteilung

Erzeugen Sie mit Hilfe der inversen Verteilungsfunktion eine approximative Cauchyverteilung mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

und berechnen Sie damit möglichst genau das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{\pi(1+x^2)}\, dx.$$

Die Symmetrie der Cauchy-Verteilung legt nahe, dass der Mittelwert 0 ist. Stimmt das? Was ergibt sich numerisch? (Nehmen Sie sehr viele Punkte zur Mittelwertberechnung).