Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk

Ausgabe: 13. Dez., WS 2007/08
Übung: 20. Dez., G435

Numerik stochastischer Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1: Diskrete Verteilungsfunktion

Schreiben Sie eine Matlab Funktion **cdf** (cumulative distribution function), so dass durch die Befehle **[x,y] = cdf(z,[a,b]); plot(x,y);** die diskrete Verteilungsfunktion

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(z_i), \qquad x \in \mathbb{R}$$

der PZZ $z_1, \ldots, z_N$ eingeschränkt auf das Intervall $[a, b]$ dargestellt wird. Überprüfen Sie das Programm mit gleichverteilten, exponentialverteilten, binomialverteilten und normalverteilten PZZ. Woran erkennt man, ob das Programm fehlerfrei arbeitet?

Aufgabe 2: Zentraler Grenzwertsatz life!

Ist $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, so ist

$$S^{(N)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)$$

für großes N annähernd normalverteilt.

1. Ausgehend von PZZ mit einer Verteilung wie X_i erzeugen Sie PZZ $S_1^{(N)}, S_2^{(N)}, \ldots$ die annähernd wie $S^{(N)}$ verteilt sind.

2. Zeichnen Sie für gleichverteilte, exponentialverteilte und bernoulliverteilte PZZ die diskreten Verteilungsfunktionen von $[S_1^{(N)}, S_2^{(N)}, \ldots, S_M^{(N)}]$ im Intervall $[-3, 3]$ für $N \in \{1, 10, 100\}$ in ein Diagramm (**hold on;** benutzen) und vergleichen Sie die Kurven mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung (aus **erf** berechenbar). Sehen Sie die Konvergenz in Verteilung?

Aufgabe 3: Transformationsmethode

Sei X eine n-dimensionale Zufallsvariable, die gemäß der Dichte $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ verteilt ist. Welche Dichte besitzt dann die Zufallsvariable $Y = H(X)$, wenn $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus ist? Die Konstruktion von Pseudozufallsvektoren durch Anwendung einer Abbildung H auf einen Vektor von Pseudozufallszahlen mit vorgegebener Verteilung nennt man *Transformationsmethode.* Konstruieren Sie mit einer affin linearen Abbildung $H(x) = Ax + b$ aus einer Folge von unabhängigen, n-dimensionalen $N(0, I)$-verteilten Pseudozufallsvektoren eine Folge von $N(\mu, \Sigma)$-verteilten Vektoren, wobei $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit ist. Wie sind A und b in Abhängigkeit von Σ und μ zu wählen?

Schreiben Sie eine Matlab Funktion **N(mu,Sigma,m)**, die **m** unabhängige normalverteilte Pseudozufallsvektoren mit Kovarianzmatrix **Sigma** $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Mittelwert **mu** $\in \mathbb{R}^n$ erzeugt. Die Rückgabe soll in einer $n \times m$ Matrix erfolgen. Zeichnen Sie zum Test für das Beispiel **mu = [-1 , 1];** und **Sigma=[2 , 0.9 ; 0.9 , 0.5];** 1000 Pseudozufallspunkte in einem Diagramm, sowie auf dem Intervall $[-4, 4]$

- die approximative Verteilungsfunktion der ersten Komponenten (**cdf** von Aufgabe 1)
- die Verteilungsfunktion der ersten Komponenten, für die die zweite Komponente kleiner als 0.5 ist

Wiederholen Sie das Experiment zum Vergleich im unkorrelierten Fall **mu = [-1 , 1];** und **Sigma=[2 , 0 ; 0 , 0.5];**.