Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk

Ausgabe: 25. Jan., WS 2007/08
Übung: 7. Feb. 16-18h, D435

Numerik stochastischer Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1: Milstein Verfahren

Implementieren Sie das Milstein Verfahren für die Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad S_0 = 1, \qquad \mu = 1.0, \quad \sigma = 0.5$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung

$$S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right).$$

Zeichnen Sie dazu mehrere Pfade der exakten Lösung zusammen mit den approximativen Pfaden des Milstein Verfahrens und des Euler-Maruyama Verfahrens für eine kleine Schrittweite (z.B. $\Delta t = 1/1000$). Bestimmen Sie approximativ die starke und schwache Konvergenzordnung des Milstein Verfahrens im Intervall $[0, 1]$.

Aufgabe 2: Schwache Konvergenz

Zur Überprüfung ob schwache Konvergenz auch ohne genaue Approximation der Pfade erzielt werden kann, betrachten wir das Verfahren

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + rX_{t_n}\Delta t + \sigma X_{t_n}\sqrt{\Delta t}\xi_n, \qquad X_0 = S_0, \qquad n < N$$

mit $\Delta t = T/N$ und unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ξ_n, die $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$ erfüllen. Dieses Verfahren sollte mit Ordnung 1 schwach gegen die Lösung der Differentialgleichung

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW, \qquad S(0) = S_0, \qquad t \in [0, T].$$

konvergieren, sofern die Testfunktionen genügend glatt sind.

1. Führen Sie analog zur Vorgehensweise von Blatt 5 eine numerische Konvergenzuntersuchung durch (mit doppeltlogarithmischem Fehlerplot und Steigungsbestimmung der Ausgleichsgerade) für den Fall $S_0 = 1, r = 0.1, \sigma = 0.01, T = 1$ und die Testfunktionen $g(x) = x$ bzw. $g(x) = x^2$. (Hinweis: wählen Sie verschiedene $N \leq 50$ und mindestens 30000 Pfade zur Erwartungswertbestimmung.)

2. Wählen Sie die (nur Lipschitz-stetige) Testfunktion $g(x) = e^{-rT}(x - K)^+$ und überprüfen Sie, ob der Fehler $|E(g(S_T)) - E(g(X_T))|$ immer noch die Konvergenzordnung 1 erreicht. (Mit den gleichen Parametern wie in (1) und $K = 1.105$ – der exakte Erwartungswert ist durch die Black-Scholes Formel gegeben.)

Aufgabe 3: Preisprozess im Heston-Modell

Bei der Optionspreisbestimmung werden Preisprozesse für Basiswerte oft mit der Differentialgleichung $dS_t = r(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t$ modelliert. Natürlich wird auch intensiv über andere, (hoffentlich) realistischere Beschreibungen nachgedacht. Ein solch alternativer Ansatz ist z.B. das Heston Modell

$$\begin{aligned} dS &= rSdt + \sigma S dW^{(1)}, \\ d\sigma^2 &= \kappa(\theta - \sigma^2)dt + \nu\sigma dW^{(2)}. \end{aligned}$$

mit

$$r(t) = \frac{1}{100}(\sin(2\pi t) + t + 3), \quad \kappa = 2, \quad \theta = 0.4, \quad \nu = 0.2$$

und Startwerten $S_0 = 100$, $\sigma_0 = 0.25$. Dabei seien die Zuwächse des Prozesses $(W^{(1)}, W^{(2)})$ über ein Zeitintervall der Länge h wie $\mathcal{N}(0, h\Sigma)$ verteilt mit Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho = 0.2.$$

Es handelt sich hierbei also um ein System bei dem die zeitliche Evolution der Volatilität auch durch eine Differentialgleichung gegeben ist. Obwohl diese Gleichung nicht vom Preisprozess abhängt, sind beide Gleichungen doch dadurch gekoppelt, dass die Komponenten der zufälligen Zuwächse korreliert sind. Wenn Sie sich den deterministischen Teil (Drift) der Gleichung für σ^2 ansehen, dann erkennen Sie, dass σ^2 sich im Mittel dem Wert θ annähern wird. Die Lösung des Heston Modell wird also gewisse Ähnlichkeit mit dem Lösungsprozess der Gleichung

$$dU = rUdt + \sqrt{\theta}U dW^{(1)}, \qquad U_0 = S_0$$

haben.

Implementieren Sie das Euler-Maruyama Verfahren für das Heston Modell. Bestimmen Sie approximativ den Mittelwert und die Varianz von S_1 und schauen Sie sich einige Lösungspfade an. Vergleichen Sie die Lösungspfade jeweils mit denen des zugehörigen Prozesses U. Was beobachten Sie, wenn σ_0 nahe bei $\sqrt{\theta}$ ist?