Insbesondere gilt ab einem gewissen $\bar{N} \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\mathcal{Z}(W^{(N)})} \sum_{i=1}^{\infty} W_i^{(N)} G(X_i^{(N)}) = \int G\,[W,X]_N \geq \frac{1}{2}, \qquad N \geq \bar{N},$$

so dass sicherlich ab diesem $\bar{N}$ auch

$$\mathcal{Z}((WG(X))^{(N)}) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i^{(N)} G(X_i^{(N)}).$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \int f\,[WG(X),X]_N &= \frac{1}{\int G\,[W,X]_N} \frac{1}{\mathcal{Z}(W^{(N)})} \sum_{i=1}^{N} W_i G(X_i) f(X_i) \\ &= \frac{1}{\int G\,[W,X]_N} \int fG\,[W,X]_N \to \int fG\,[W,X]. \end{aligned}$$

Dies zeigt, die erforderliche schwache Konvergenz. ■

2.4. Übungen

Aufgabe 2.1. In Definition 2.3 wurden Quadraturformeln als mathematische Strukturen mit Komponenten d, N, x, w eingeführt. Es liegt daher nahe, Quadraturformeln bei der Programmierung durch einen *zusammengesetzten* Datentyp (struct) zu beschreiben. Die Komponenten einer Quadraturformel `q` sind dann die beiden Zahlen `q.d` und `q.N`, sowie eine `N`×`d` Matrix `q.x`, sowie die Gewichte `q.w` als 1×`N` Matrix.

Eine Maßapproximation gemäß Definition 2.8 ist als Folge von Quadraturformeln als Funktion auf den natürlichen Zahlen programmierbar, deren Funktionswerte gerade Quadraturformeln sind.

(1) Programmieren Sie Maßapproximationen `q=Trapezregel(n)`, `q=Mittelpunktregel(n)` und `q=KeplerscheFassregel(n)`, die bei Vorgabe eines `n` (überprüfen Sie, ob `n` eine natürliche Zahl ist) die entsprechende zusammengesetzte Integrationsregel auf $[0,1]$ mit `n` Teilintervallen als Quadraturformel `q` zurückgeben.
(2) Programmieren Sie eine Funktion `E(f,q)`, die den Punktmaß(`q`)-Erwartungswert der Funktion `f` (Übergabe des function handle) berechnet.

(3) Programmieren Sie eine Funktion `Massprodukt(P,Q)`, die die Quadraturformel zum Produkt `P`$\otimes$`Q` der beiden Quadraturformeln `P` und `Q` zurückgibt.
(4) Programmieren Sie eine Funktion `Bildmass(H,Q)`, die die Quadraturformel zum Bildmaß berechnet, wobei `H` wieder ein function handle und Q eine Quadraturformel ist.
(5) Überlegen Sie sich zu jeder Teilaufgabe sinnvolle Testfälle (auch höherdimensionale), um die Algorithmen zu überprüfen und dokumentieren Sie ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie:

(1) Sind $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit Verteilung P bzw. Q, dann ist
$$X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \ldots$$
eine Folge mit Verteilung $(P+Q)/2$.
(2) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Verteilung $U^1 = \mathbb{1}_{[0,1]}\lambda^1$, dann hat die Folge
$$\frac{1}{2}X_1, \frac{1}{2}(X_1+1), \frac{1}{2}X_2, \frac{1}{2}(X_2+1), \ldots$$
ebenfalls die Verteilung U^1.
(3) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Verteilung Q, dann hat die Folge
$$(X_1, X_2), (X_3, X_4), (X_5, X_6), \ldots$$
nicht notwendig die Verteilung $Q \otimes Q$.
(4) Ist X eine Folge mit Verteilung Q, dann hat nicht jede Teilfolge notwendig die Verteilung Q.

Aufgabe 2.3. Zeigen Sie die Äquivalenz von schwacher und vager Konvergenz im Fall von Wahrscheinlichkeitsmaßen.