Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

13. Okt., WS 2005/06

Lösungsvorschlag zur Präsenzübung zum Einführungskurs

“Grundlagen der Logik”

Aufgabe 1: Begriffsklärungen

a) **Aussage:** In der zweiwertigen Logik ist eine Aussage ein Satz, dem in eindeutiger, widerspruchsfreier Weise genau einer der beiden Wahrheitswerte $\{0, 1\}$ zugeschrieben werden kann, d.h. der Satz ist entweder *falsch* oder *wahr*.

Aussageform: Eine Aussageform $A(x)$ (über einer Menge X) ist ein Satz, in welchem eine Variable x auftritt. Setzt man für x konkrete Werte aus X ein, so ergeben sich Aussagen. Eine weitere Möglichkeit Aussagen zu erzeugen besteht im Davorsetzen von Quantoren, beispielsweise: $\forall x \in X\ A(x)$ oder $\exists x \in X\ A(x)$.

Junktor: Mittels Junktoren lassen sich ein, zwei oder auch mehrere gegebene Aussagen zu einer neuen Aussage verknüpfen (lat. iungere). Am gebräuchlichsten sind der einstellige Negations-Junktor $\neg$ (nicht) sowie die folgenden zweistelligen Junktoren:

Symbol	Bedeutung	Name
$\vee$	oder	Disjunktion
$\wedge$	und	Konjunktion
$\Rightarrow$	wenn ... dann ...	Implikation, Konditionalgefüge
$\Leftrightarrow$	genau dann wenn	Äquivalenz, Bikonditionalgefüge
$\oplus$	entweder ... oder ...	ausschließendes Oder
$\bigtriangledown$	weder ... noch ...	NOR-Verknüpfung
$\mid$	nicht zugleich	NAND-Verknüpfung

Im Fall der Konjunktion kann man statt *und* alternativ *sowohl ... als auch ...* sagen. Ferner sind folgende Sprechweisen gebräuclich: A *impliziert* B für $A \Rightarrow B$ und für $A \Leftrightarrow B$: A *ist äquivalent zu* B oder *wenn und nur wenn* A *dann* B bzw. A *dann und nur dann wenn* B.

Um in Ausdrücken mit zwei oder mehr Junktoren keine Zweideutigkeiten aufkommen zu lassen, muß eine Bindungsstärke oder Priorität vereinbart werden. Im allgemeinen gilt die Negation als stärkster Junktor, während die Implikation und vor allem die Äquivalenz die schwächste Priorität genießen. In allen anderen Fällen ist es sinnvoll, sich mit Klammern zu behelfen.

Ausdruck: Ein (logischer) Ausdruck ist eine endliche Folge von Aussagevariablen, welche durch Junktoren miteinander verknüpft sind, z.B. $(A \vee B) \wedge \neg C$.

b) **Tautologie:** Eine Tautologie ist ein Ausdruck, welcher stets wahr ist unabhängig von den Wahrheitswerten, welche den darin entahltenen Aussagevariablen zugeordent werden können. Um zu entscheiden, ob ein gegebener Ausdruck tatsächlich eine Tautologie ist, trägt man die möglichen Kombinationen von Wahrheitsbelegungen in Wahrheitstabellen ein und wertet diese aus.

Kontradiktion: Eine Kontradiktion ist ein Ausdruck, welcher stets falsch ist.

c) Aus jeder Tautologie gewinnt man durch Negation (Davorschreiben von $\neg$) eine Kontradiktion und umgekehrt. Daher entspricht eine Kontradiktion einer negierten Tautologie. Von diesem Standpunkt kann man eine Kontradiktion auch als das "Gegenteil" einer Tautologie betrachten.

   Eine andere Sichtweise ist jedoch möglich, wenn wir die Menge der Tautologien als eine Teilmenge in der Menge aller logischen Ausdrücke auffassen. Dann ist das "Gegenteil" einer Tautologie ein Ausdruck, der zur Komplementmenge der Tautologien gehört. Diese enthält neben den Kontradiktionen auch alle logischen Ausdrücke, welche sowohl wahr als falsch sein können – je nach Wahrheitsbelegung der darin auftretenden Aussagevariablen.

d) i) Tautologische Äquivalenzen (z.B. de Morgan Regeln, Distributivegesetze etc.),

   ii) Tautologische Implikationen (z.B. Kettenschluß, Disjunktiver Syllogismus $(A \vee B) \wedge \neg A \;\Rightarrow\; B$ siehe Skript, etc.)

e) Die *logischen de Morgan-Regeln* geben an wie eine Negation (Verneinung) auf eine Disjunktion (Oder-Verknüpfung) bzw. auf eine Konjunktion (Und-Verknüpfung) wirken:

   1) Die Negation einer Disjunktion ist äquivalent zur Konjunktion der Negationen.
   $$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$
   2) Die Negation einer Konjunktion ist äquivalent zur Disjunktion der Negationen.
   $$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

f) Beispiel für das Distributivgesetz $A \wedge (B \vee C) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$:

   1) *Paul fährt in die Stadt, um ins Kino oder ins Theater zu gehen.*
   2) *Paul fährt in die Stadt und geht ins Kino oder er fährt in die Stadt, um ins Theater zu gehen.*

g) **Kontrapositionssatz:** $A \Rightarrow B \;\Leftrightarrow\; \neg B \Rightarrow \neg A$

   Offenbar vertauschen A, B ihre Positionen bezüglich des Implikationspfeiles.

h) *Ex falso quod libet:* Ein Blick auf die Wahrheitstafel der Implikations-Verknüpfung zeigt, daß die Implikation $A \Rightarrow B$ stets wahr ist, wenn die Prämisse A falsch ist. Somit kann aus einer falschen Prämisse entweder eine falsche oder eine richtige Konklusion B gefolgert werden, gerade so wie es einem beliebt.

i) Sind zwei Aussagen A, B gegeben, so bezeichnet man die zusammengesetzte Aussage $A \Rightarrow B$ als *Implikation* (Schlußfolgerung). In diesem Zusammenhang heißt A die *Prämisse* (Voraussetzung) und B die *Konklusion* (Folgerung).

   In der Mathematik bezeichnet man A gern als *hinreichende* Bedingung (engl. sufficient condition) für B, während B die *notwendige* Bedingung (engl. necessary condition) für A darstellt.

Aufgabe 2: Die NOR-Verknüpfung[1]

a) Zunächst müssen wir klären, wie die *weder-noch* Konstruktion zu verstehen ist. Das intuitive Sprachgefühl legt folgende Umformulierung von Satz i) nahe:

[1](engl. neiter ... nor... = weder ... noch ...)

iii) Es regnet nicht und schneit nicht[2].

Dies veranlaßt uns folgende Äquivalenz *per Definition* einzuführen:

$$A \bigtriangledown B \;\Leftrightarrow\; \neg A \wedge \neg B. \tag{1}$$

Für die zweistellige Verknüpfung $\bigtriangledown$ erhalten wir dann die folgende Wahrheitstafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \bigtriangledown B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(2)

Analysieren wir nun die beiden Sätze. Wir wollen zeigen, daß i) und ii) bedeutungsgleich sind. Da wir i) im Sinne von iii) verstehen, beweisen wir die Bedeutungsgleichheit von ii) und iii). Offensichtlich sind ii) und iii) aus den beiden folgenden Teilaussagen zusammengesetzt:

A: Es regnet. B: Es schneit.

Satz ii) geht aus der Verknüpfung $\neg(A \vee B)$ hervor, während Satz iii) durch den Ausdruck $\neg A \wedge \neg B$ gegeben ist. Die Bedeutungsgleichheit der beiden Sätze ergibt sich sofort, wenn wir nachweisen, daß es sich bei dem Ausdruck

$$\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \wedge \neg B \tag{3}$$

um eine Tautologie handelt, wobei A, B nun für beliebige Aussagen stehen. Dazu haben wir die Gleichnung

$$w\big(\neg(A \vee B)\big) = w(\neg A \wedge \neg B)$$

für beliebige Wahrheitsbelegungen von A, B zu überprüfen. Ein Vergleich der vierten und letzten Spalte der nachstehenden Wahrheitstabelle zeigt, daß die Gleichung unabhängig von $w(A), w(B)$ gegeben ist.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \vee B)$	$w\big(\neg(A \vee B)\big)$	$w(\neg A)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A \wedge \neg B)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Beachte, daß (3) eine der beiden de Morgan Regeln darstellt.

b) Die Äquivalenz

$$\neg A \;\Leftrightarrow\; A \bigtriangledown A \tag{4}$$

bzw. die Gleichung $w(\neg A) = w(A \bigtriangledown A)$ kann z.B. aus der ersten und letzten Zeile (denn hier gilt $B = A$) von Tabelle (2) abgelesen werden.

Um die UND-Verknüpfung $\wedge$ mit Hilfe der NOR-Verknüpfung $\bigtriangledown$ darzustellen, lassen wir uns von einem Beispiel aus der Alltagssprache leiten:

Es ist kalt und naß. $\Leftrightarrow$ Weder ist es warm noch trocken.
$\Leftrightarrow$ Weder ist es nicht kalt noch nicht naß.

[2] Umgangssprachlich bevorzugt man wohl die folgende Version: "Es regnet und schneit nicht." Da nun nicht mehr eindeutig klar ist, worauf sich das *nicht* bezieht, kann dieser Satz auch in dem Sinne "Es regnet zwar, aber es schneit nicht." mißgedeutet werden.

Identifizieren wir “Es ist kalt.” mit der Aussagevariable A und “Es ist naß.” mit der Aussagevariable B, so gibt das obige Beispiel Anlaß, folgende Äquivalenz zu vermuten:

$$A \wedge B \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \bigtriangledown (\neg B).$$

Mit $\neg A \;\Leftrightarrow\; A \bigtriangledown A$ erhalten wir schließlich:

$$A \wedge B \;\Leftrightarrow\; (A \bigtriangledown A) \bigtriangledown (B \bigtriangledown B). \tag{5}$$

Um die Richtigkeit dieser Äquivalenz zu zeigen (d.h. daß es sich bei dem Ausdruck um eine Tautologie handelt) weisen wir anhand der Wahrheitstabellen die Gleichung

$$w(A \wedge B) = w\big((A \bigtriangledown A) \bigtriangledown (B \bigtriangledown B)\big)$$

für beliebige Wahrheitsbelegungen von A und B nach. Hierbei verwenden wir die Abkürzungen C und D für $A \bigtriangledown A$ bzw. $B \bigtriangledown B$.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \wedge B)$	$w(C)$	$w(D)$	$w(C \bigtriangledown D)$
0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Beim Ausfüllen der letzten Spalte haben wir Tabelle (2) benutzt. Wie erwartet stimmen die dritte und letzte Spalte überein, womit unsere Vermutung bewiesen ist.

Wenden wir uns nun der ODER-Verknüpfung $\vee$ zu und bemühen abermals unser Beispiel, wobei wir versuchen das *oder* durch *weder … noch …* zu ersetzen:

Es ist kalt oder naß.	⇔	Es ist nicht warm und trocken.
	⇔	Es ist nicht nicht kalt und nicht naß.
	⇔	Es ist nicht weder kalt noch naß.

Es sei an dieser Stelle zugegeben, daß der Satz in der zweiten Zeile ob des dreifach vorkommenden *nicht* nur mit Konzentration verständlich ist. Auch der Satz in der dritten Zeile entspricht eher einer komplizierten Ausdrucksweise. Dennoch haben wir unser Ziel erreicht. Notieren wir das Beispiel in allgemeiner Form:

$$\begin{array}{rcll} A \vee B & \Leftrightarrow & \neg(\neg A \wedge \neg B) & \text{(Negation von (3))} \\ & \Leftrightarrow & \neg(A \bigtriangledown B) & \text{(Substitution von (1))} \\ & \Leftrightarrow & (A \bigtriangledown B) \bigtriangledown (A \bigtriangledown B) & \text{(Anwendung von (4) mit } A \bigtriangledown B \text{ statt } A\text{)} \end{array}$$

Da wir bei den Umformungen nur auf bereits bekannte Äquivalenzen zurückgegriffen haben, können wir sicher sein, daß es sich bei dem Ausdruck

$$A \vee B \;\Leftrightarrow\; (A \bigtriangledown B) \bigtriangledown (A \bigtriangledown B) \tag{6}$$

um eine tautologische Äquivalenz handelt, ohne nochmals den Check mit den Wahrheitstabellen durchzuführen.

Beachte, daß sich die rechte Seite von (6) sprachlich nicht mehr nachvollziehen läßt, da es sich um eine *weder-noch* Konstruktion handelt in die zwei *weder-noch* Konstruktionen verschachtelt sind – da würde wohl jeder nur noch Kauderwelsch verstehen! Beachte ferner den feinen Unterschied zwischen (6) und (5).

Aufgabe 3: Auflösung von Konditionalgefügen

a) Die Analyse der Sätze gestaltet sich einfacher, wenn wir sie ohne Bedeutungsveränderung etwas umstellen. Hierbei nutzen wir nur die Flexibilität unserer Sprache, die uns einen gewissen Gestaltungsspielraum zugesteht, ohne den Sinn abzuwandeln.

I) *Wenn Hans die Übungen nicht sorgfältig bearbeitet hat, besteht er die Klausur nicht.*

II) *Hans hat die Übungen sorgfältig bearbeitet, oder er besteht die Klausur nicht.*

III) *Es ist nicht möglich, daß Hans die Übungen nicht sorgfältig bearbeitet hat und die Klausur besteht.*

Satz I) unterscheidet sich von i) dadurch, daß wir die Prämisse – wie meist üblich – vor die Konklusion gestellt haben. Satz II) ist nur der Übersichtlichkeit halber aufgeführt und stimmt mit ii) überein. Was Satz iii) anbetrifft, so beachte man, daß die Präposition *ohne* eine Verneinung beinhaltet. Das Satzfragment *ohne die Übungen sorgfältig bearbeitet zu haben* kann durch *und die Übungen nicht sorgfältig bearbeitet hat* ersetzt werden. Um III) zu erhalten nutzen wir ferner die Kommutativität des Bindewörtchens *und*.

Die drei Sätze I), II) und III) sind offenbar aus den Teilaussagen

A: *Hans hat die Übungen nicht sorgfältig bearbeitet.*

B: *Hans besteht die Klausur nicht.*

in folgender Weise aufgebaut:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & A \Rightarrow B \\ \text{II)} & \neg A \vee B \\ \text{III)} & \neg(A \wedge \neg B) \end{array}$$

b) Die Gleichheit der Aussagen von Satz I), II) und III) ist insbesondere sichergestellt, wenn die folgenden Ausdrücke

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee B \tag{7}$$

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg(A \wedge \neg B) \tag{8}$$

Tautologien darstellen. Denn in diesem Fall gilt, daß die jeweils linke Seite äquivalent zur rechten Seite ist, wenn A, B beliebige Aussagen vertreten. Den Nachweis der Tautologie-Eigenschaft erbringen wir wie in Aufgabe 2 mittels Wahrheitstabellen.

ad (7):

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg A)$	$w(\neg A \vee B)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

ad (8):

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w(A \wedge \neg B)$	$w\big(\neg(A \wedge \neg B)\big)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Beachte, daß man sowohl (7) als auch (8) dazu verwenden kann, die Implikationsverknüpfung $\Rightarrow$ zu definieren.

c) Die gesuchte Darstellung erhalten wir durch Äquivalenzumformungen unter Zuhilfenahme von Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B \quad &\Leftrightarrow \quad \neg A \vee B && \text{(entspricht (7))} \\ &\Leftrightarrow \quad (A \bigtriangledown A) \vee B && \text{(Ausnutzen von (4))} \\ &\Leftrightarrow \quad \big((A \bigtriangledown A) \bigtriangledown B\big) \bigtriangledown \big((A \bigtriangledown A) \bigtriangledown B\big) && \text{(Anwenden von (6))} \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch mit (8) starten, wobei die Rechnung etwas mehr Schritte in Anspruch nimmt:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(A \wedge \neg B) && \text{(entspricht (8))} \\ &\Leftrightarrow \quad \neg\big(\neg(\neg A) \wedge \neg B\big) && \text{(doppelte Negation)} \\ &\Leftrightarrow \quad \neg(\neg A \bigtriangledown B) && \text{(Einsetzen von (1))} \\ &\Leftrightarrow \quad \neg\big((A \bigtriangledown A) \bigtriangledown B\big) && \text{(Anwenden von (4))} \\ &\Leftrightarrow \quad \big((A \bigtriangledown A) \bigtriangledown B\big) \bigtriangledown \big((A \bigtriangledown A) \bigtriangledown B\big) && \text{(abermaliges Anwenden von (4))} \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe: Analysiere den Ausdruck: $\big(B \bigtriangledown (A \bigtriangledown B)\big) \bigtriangledown \big(B \bigtriangledown (A \bigtriangledown B)\big)$

Antwort: $(\neg A \vee B) \wedge \underbrace{(B \vee \neg B)}_{\text{Tautologie}}$

d) Folgende Formulierungen sind z.B. möglich:

1) Hans bekommt den Übungsschein genau dann, wenn er die Klausur besteht.
2) Hans besteht entweder die Klausur oder er bekommt den Übungsschein nicht.
3) Es wird nicht vorkommen, daß Hans den Schein bekommt, ohne die Klausur zu bestehen oder daß er die Klausur besteht, ohne den Schein zu erhalten.

Begründung: 1) ist klar. 2) entspricht dem folgenden Ausdruck:

$$(D \Leftrightarrow C) \;\Leftrightarrow\; \neg D \oplus C \;\Leftrightarrow\; D \oplus \neg C \tag{9}$$

Die erste Äquivalenz prüfen wir mit der folgenden Wahrheitstabelle nach:

$w(D)$	$w(C)$	$w(D \Leftrightarrow C)$	$w(\neg D)$	$w(D \oplus C)$	$w(\neg D \oplus C)$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Alternativ, ist auch folgende Rechnung möglich, wobei wir von der Tautologie

$$A \oplus B \;\Leftrightarrow\; (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \tag{10}$$

Gebrauch machen, welche auch als Definition der *entweder-oder* Verknüpfung dienen könnte.

$$\begin{aligned} D \Leftrightarrow C \quad &\Leftrightarrow \quad (D \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow D) && \text{(Definition der Bikondition)} \\ &\Leftrightarrow \quad (\neg D \vee C) \wedge (\neg C \vee D) && \text{(Einsetzen von (7))} \\ &\Leftrightarrow \quad \Big(\neg D \wedge (\neg C \wedge D)\Big) \vee \Big(C \wedge (\neg C \vee D)\Big) && \text{(Distributivgesetz)} \\ &\Leftrightarrow \quad (\neg D \wedge \neg C) \vee (\neg D \wedge D) \vee (C \wedge \neg C) \vee (C \wedge D) && \text{(Distributivgesetz)} \\ &\Leftrightarrow \quad (\neg D \wedge \neg C) \vee (D \wedge C) && \text{(Weglassen der Tautologien)} \\ &\Leftrightarrow \quad \neg D \oplus C && \text{(Anwenden von (10))} \end{aligned}$$

Begründung von 3):

$$\begin{aligned} C \Leftrightarrow D \quad \Leftrightarrow &\quad (C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow C) && \text{(Definition der Bikondition)} \\ \Leftrightarrow &\quad \neg(C \wedge \neg D) \wedge \neg(D \wedge \neg C) && \text{(Einsetzen von (8))} \\ \Leftrightarrow &\quad \neg\Big((C \wedge \neg D) \vee (D \wedge \neg C)\Big) && \text{(Anwenden von (3))} \end{aligned}$$

Das Bestehen der Klausur ist eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung zum Erwerb des Übungsscheines; dagegen ist die sorgfältige Bearbeitung der Übungsaufgaben nur notwendig.

Aufgabe 4: Vom mathematischen Beweisen

Es ist in der Mathematik üblich, Sachverhalte und Resultate in der Form von Theoremen (Lehrsätzen) aufzuschreiben. Jedem Theorem wird meist ein Beweis nachgestellt (seltener handelt es sich auch um eine vorangestellte Herleitung), in dem gezeigt wird, daß die Aussage des Theorems richtig ist. Die Aussage eines Theorems besteht typischer Weise in einer Implikation $A \Rightarrow B$, deren Richtigkeit es zu verifizieren gilt.

a) **Was ist ein direkter Beweis?**

Der direkte Beweis basiert auf dem Prinzip des *Kettenschluß* (Modus barbara, hypothetischer Syllogismus):

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$$

Man zerlegt den Beweis in eine gewisse Anzahl n von Teilschritten, welche jeweils eine Zwischenbehauptung Z_k enthalten.

$$A \Rightarrow Z_1 \Rightarrow Z_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z_n \Rightarrow B$$

b) **Was ist ein Beweis durch Kontraposition?**

Nach dem Kontrapositionssatz verhalten sich die Implikationen $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ äquivalent zueinader, d.h. erstere ist genau dann wahr, wenn dies auch für letztere gilt. Somit ist es alternativ möglich, die Richtigkeit der Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu beweisen, was als Kontrapositionsbeweis bezeichnet wird.

Beachte, daß der Beweis von $\neg B \Rightarrow \neg A$ durchaus in direkter Weise erfolgen kann.

c) **Was ist ein indirekter Beweis? (Widerspruchsbeweis, reductio ad absurdum)**

Beim indirekten Beweis wird angenommen, daß die Aussage S des Theorems falsch sei, d.h. es wird $\neg S$ als wahr postuliert. Gelingt es, aus $\neg S$ eine Hilfsaussage H und deren Negation $\neg H$ zu folgern, so führt dies auf einen Widerspruch, da nur eine der beiden Aussagen $H, \neg H$ wahr sein kein und eine dritte Möglichkeit ausgeschlossen ist (lat. *tertium non datur*). Dieser Widerspruch ist nur dadurch aufzulösen, daß die Annahme, $\neg S$ sei wahr, zu verwerfen ist. Somit ist $\neg S$ falsch und S stellt sich als wahr heraus.

Das Beweisprinzip beruht auf der folgenden Tautologie:

$$\big(\neg S \Rightarrow (H \wedge \neg H)\big) \Rightarrow S$$

d) Bei der Verneinung unterläuft gelegentlich der Fehler einer zu starken Restriktion, denn in der Regel gilt: *nicht alle* $\neq$ *keiner* oder *nicht immer* $\neq$ *niemals* sondern stattdessen *einige* bzw. *manchmals*.

i) affirmativ (bejahend): für alle x aus X gilt $A(x)$.

$$\forall x \in X : A(x)$$

negativ (verneinend): es existiert ein x aus X, so daß $A(x)$ nicht gilt.

$$\neg\big(\forall x \in X : A(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in X : \neg A(x)$$

ii) affirmativ (bejahend): für alle x aus X gilt $A(x)$ nicht.

$$\forall x \in X : \neg A(x)$$

negativ (verneinend): es existiert ein x aus X, so daß $A(x)$ gilt.

$$\neg\big(\forall x \in X : \neg A(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in X : A(x)$$

iii) affirmativ (bejahend): es existiert ein x aus X, so daß $A(x)$ gilt.

$$\exists x \in X : A(x)$$

negativ (verneinend): für kein x aus X gilt $A(x)$.

$$\neg\big(\exists x \in X : \neg A(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X : \neg A(x)$$

iv) affirmativ (bejahend): es existiert ein x aus X, so daß $A(x)$ nicht gilt.

$$\exists x \in X : \neg A(x)$$

negativ (verneinend): für alle x aus X gilt $A(x)$.

$$\neg\big(\exists x \in X : \neg A(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X : A(x)$$

Zum Schluß: Bei dem Satz handelt es sich um einen typischen *Syllogismus*. Darunter versteht man eine Schlußweise, welche von zwei Aussagen ausgeht und diese miteinander kombiniert, um eine dritte Aussage zu folgern. Ein weiteres Beispiel wäre: *Alle Menschen sind sterblich. Alle Griechen sind Menschen. Ergo sind alle Griechen sterblich.*
Bei dem Beispiel auf dem Übungszettel werden ebenfalls zunächst zwei Beobachtungen wiedergegeben, die der Leser als richtig anerkennt (von Ausnahmen wie Nacktschnecken oder Lehmhütten in Afrika abgesehen). Die Folgerung ist jedoch so absurd, daß sie zum Schmunzeln anregt. Der Witz funktioniert, weil hier an und für sich völlig verschiedene Objekte, wie eine schützende Schale im Tierreich und eine künstliche, menschliche Behausung, (denen zwar die Grundfunktion des Schützens gemeinsam ist, die aber ansonsten nichts miteinander zu tun haben) mit demselben Begriff *Haus* bezeichnet werden.
Vom logischen Standpunkt sind Prämisse und Folgerung nicht zutreffend bzw. falsch. Dennoch ist die Implikation als solche richtig (denn aus Falschem darf Falsches gefolgert werden). Dies intuitiv einzusehen fällt uns schwer, da wir es nicht gewohnt sind, allein die Implikation zu bewerten, ohne die Richtigkeit der Prämisse und Konklusion zu beachten.