1. Einleitung

In einem Zeitraum von mehreren tausend Jahren haben die Menschen die Wissenschaft „Mathematik” entwickelt, um die von ihnen beobachteten Gesetzmäßigkeiten und Ordnungen in ihrer Umwelt zu beschreiben. Dabei bedeutet „Mathematik machen” nicht nur „Rechnen” bzw. Anwendung von vorgegebenen Regeln, sondern vor allem das Entwickeln *neuer* Regeln und Ordnungsstrukturen, die dabei helfen sollen, die Welt besser zu verstehen.
In diesem Zusammmenhang haben sich eine spezielle *Fachsprache*, eine eigene *Symbolik* sowie eine angepasste *Methodik* entwickelt. Die Formulierung mathematischer Sachverhalte benutzt z.B. Sprachelemente der Logik und Mengenlehre und seit ungefähr einhundert Jahren beruht die Vorgehensweise beim Entwickeln neuer mathematischer Theorien auf der sogenannten axiomatischen Methode. Im Vergleich zu anderen Wissenschaften ist die Besonderheit der Mathematik, dass Begriffe und Argumentationen extrem *präzise* genutzt werden. Der Umgang mit dieser Präzision sowie mit der hohen Dichte des über viele Jahre hinweg gesammelten und stark vernetzten Wissens kann zu Studienbeginn erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Dies etwas abzumildern ist das Ziel des Vorkurses.

2. Problem erkannt, Gefahr gebannt?

Vom Gymnasium sind Sie an eine bestimmte Form des Lernens und an einen bestimmten Umgang mit Mathematik gewöhnt. Sie werden sehen, dass sich Ihr Mathematikstudium an der Universität deutlich davon unterscheidet. Einige Gründe für diesen Unterschied sind in den folgenden Abschnitten beschrieben.

2.1. **Lernen - aber wie?** Schauen Sie einmal einem kleinen Kind zu, wie es gehen oder sprechen lernt: zuschauen, nachmachen, experimentieren, üben, nachmachen, experimentieren, zuschauen...
Lernprozesse verlangen eine intensive *selbständige* Beschäftigung mit dem Lerngegenstand. Diese kreative eigenständige Beschäftigung ist wichtig und nicht die Zeit, die Sie dabei verbringen. Lernen wird nicht in Stunden gemessen, sondern in Anzahl der Aha-Erlebnisse, d.h. der selbständig gewonnenen Einsichten.
Betrachten Sie folgende Analogie: Klavierspielen (Mathematik) hat noch *niemand* allein durch den Besuch von Konzerten (Vorlesungen) gelernt.
Konzerte zeigen nur *was* gespielt werden kann und vielleicht können Sie einige Griff*techniken* beobachten. Um Klavierspielen zu lernen müssen

Sie aber selbst auf die Tasten drücken! Es nützt auch nichts, wenn Sie viel über die Technik des Klavierspielens lesen und viel Zeit mit Büchern verbringen. Sie sind wichtig als Anleitungen aber das eigenhändige selbständige Umgehen mit dem Instrument (der Mathematik) können Sie nicht ersetzen.

2.2. **Kondensiertes Wissen.** Die Ursprünge des Gebiets „Analysis" liegen im 17. Jahrhundert und sind verbunden mit den Namen Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz. Seit dieser Zeit wurde eine riesige Menge praktischer Erfahrungen mit Konzepten wie Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit gesammelt. Die vielen Anwendungsbeispiele wurden zu abstrakteren Aussagen verdichtet, Beziehungen zwischen Konzepten wurden entdeckt, nicht vorhandene (aber oft intuitiv vorausgesetzte) Beziehungen wurden durch geschickte Gegenbeispiele widerlegt. Das Destillat aus diesem mehr als dreihundert jährigen Prozess wird Ihnen nun in drei Semestern serviert. Der Vorteil: Sie sind 200x schneller fertig! Der Nachteil: Sie lernen die abstrahierten Konzepte aber nicht die vielen Beispiele, Gedankengänge und Irrwege, die zur Abstraktion führten und die zu einem tiefergehenden Verständnis unverzichtbar sind. Der einzige Ausweg: Sie müssen sich Beispiele ansehen, Sie müssen Gedankengänge selbst durchführen und eigene Irrwege durchlaufen (Stichwort „wie würde ich das denn machen"). Kurzum, Sie müssen dem Destillat, das in der Vorlesung vermittelt wird wieder „Wasser" hinzufügen, d.h. jedes abstrakte Konzept sofort an *mehreren* Beipielen studieren, beobachten und ausprobieren. Ansonsten ist das Destillat ungenießbar und führt zu Magenverstimmungen.
Gleiches gilt für den Bereich Algebra und Geometrie, mit dem kleinen Unterschied, dass hier noch wesentlich mehr Zeit zum Konzept-Kondensieren zur Verfügung stand. Bereits die Babylonier beschäftigten sich mit algebraischen Fragestellungen und die Geometrie wurde in Griechenland vor knapp zweitausend Jahren bereits sehr weit entwickelt.
Auch hier gilt: immer Beispiele zu abstrakten Konzepten studieren (oder besser noch, eigene Beispiele konstruieren und dann studieren).

2.3. **Präzise Ausdrucksweise.** Wie bereits angedeutet, gehört es zu den Zielsetzungen der Mathematik, Gesetzmäßigkeiten und Ordnungsstrukturen zu entdecken. Eine unklare bzw. mehrdeutige Sprache wie die Umgangssprache ist allerdings für die Beschreibung von präzisen Gesetzmäßigkeiten ungeeignet. Den in der mathematischen Fachsprache benutzten Vokabeln werden deshalb in sogenannten *Definitionen* jeweils unmissverständliche Bedeutungen zugewiesen. Bei Begriffen wie „Untervektorraum", „Spuroperator" oder „kompakte Manigfaltigkeit"

gibt es kaum Verwechslungsgefahr mit Alltagskonzepten und man wird automatisch die genaue Definition zu Rate ziehen, wenn man mit den Objekten arbeitet. Gefährlicher sind da schon Begriffe wie „natürliche Zahl", „unbeschränktes Gebiet", „glatte Kurve", „Inhalt" oder „Wahrscheinlichkeit", die auch in der Umgangssprache eine ähnliche Bedeutung haben. Hier muss man sorgfältig darauf achten die präzise mathematische Bedeutung zu verwenden und nicht die umgangssprachliche. Es ist in der Mathematik besonders wichtig auf die Sprache zu achten: Worte haben genau geregelte Bedeutung und jedes Detail ist wichtig. Beachtet man das nicht, sind Aussagen schnell falsch und „Ich hatte es aber doch so gemeint" hilft nicht weiter.
Schon Goethe kommentierte die besondere Sprachnutzung in der Mathematik:
Die Mathematiker sind eine Art Franzosen; redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsbald ganz etwas anders.
Die Präzision bezieht sich aber nicht nur auf das Formulieren von Aussagen sondern auch auf die logische Argumentation. Nach genau festgelegten Regeln werden hierbei aus gegebenen wahren Aussagen neue wahre Aussagen abgeleitet. Die abgeleitete Aussage nennt man dabei einen *Satz* und den Nachweis, dass die Aussage wahr ist, einen *Beweis*. Prinzipiell besteht ein Beweis also aus einer Kette von wahren Aussagen die mit genau angegebenen logischen Schlussregeln verknüpft werden. Diese Vorgehensweise hat einen riesigen Vorteil; denn sie erlaubt es jedem die Argumentation genau nachzuprüfen. Selbst Beweise des größten Mathematikers können prinzipiell vom Studierenden im ersten Semester überprüft und für korrekt bzw. inkorrekt befunden werden. Dazu muss nämlich nur nachgesehen werden, ob die als wahr benutzten Aussagen tatsächlich wahr sind, d.h. wieder Sätze sind, und ob die logischen Schlussregeln korrekt sind und korrekt benutzt werden (diesen Prozess werden wir uns in Kürze ansehen). Die Präzision der Formulierung und Schlussfolgerung verhindert also in der Mathematik, dass Aussagen als wahr bezeichnet werden, nur weil mächtige Personen das gerne hätten. Dies ist ein sehr angenehmer Aspekt! Andererseits hat absolute Präzision aber auch den Nachteil, sehr zeitraubend und umständlich zu sein. Aus diesem Grund werden Sie kaum einen Beweis finden, in dem wirklich *alle* benutzten wahren Aussagen als solche aufgeführt wurden und genauso wird nicht *jede* benutzte Schlussregel angegeben. Diese Nachlässigkeit führt dann dazu, dass es für Studierende im ersten Semester doch wieder schwierig wird, Beweise zu verstehen und fast unmöglich, Beweise in Forschungsarbeiten nachzuvollziehen. Wie kommt es dazu? Stellen Sie sich eine Gruppe

von Mathematikern vor, die Beweise stets in absoluter Präzision (d.h. in größter Ausführlichkeit) angeben. Nach einiger Zeit stellt sich heraus, dass bestimmte Argumentationsabläufe immer wieder sehr ähnlich sind. Irgendwann werden die Gruppenmitglieder sich darauf einigen, diese immer sehr ähnlichen Schritte nicht mehr im Detail auszuschreiben, um Papier und Zeit zu sparen. Sie schreiben zur Abkürzung nur noch „daraus folgt", oder „daher", oder „und damit ergibt sich", oder einfach gar nichts, da jeder in der Gruppe in der Lage ist, die Details nachträglich wieder einzufügen. Diese Vorgehensweise ist effektiv innerhalb der Gruppe, erschwert aber offensichtlich dem Neueinsteiger das Verständnis. Die einzige Möglichkeit für den Neuling, die unpräzise Darstellung zu verstehen, besteht darin, den Gruppenprozess zu wiederholen. Die mühsame Anfangsphase des sehr genauen Aufschreibens muss durchlaufen werden, die immer wieder auftretenden Schlussweisen müssen selbst entdeckt werden, bis es langweilig wird, sie stets im Detail anzugeben. Erst wenn Klarheit besteht, wie Beweise auf dem höchsten Präzisionslevel zu führen sind, darf man Abkürzungen benutzen! Wer versucht, die Beweisführung erfahrener Mathematiker einfach nachzumachen, ohne zu wissen, wie der präzise Beweis aussehen müsste, ist in großer Gefahr, falsche Beweise zu produzieren. Was bedeutet das für Sie? In diesem Vorkurs wird gezeigt, wie das Beweisen auf der höchsten Präzisionsebene funktioniert. Sie werden dabei sehen, dass dies zwar sehr aufwendig ist aber letztlich fast mechanisch funktioniert. Mit diesem Wissen ausgestattet können Sie sich dann Vorlesungen anhören und sie anschließend in Eigenarbeit auf Ihren aktuellen Präzisionslevel *übersetzen*. Dazu aber mehr im nächsten Abschnitt.

2.4. **Alles gleichzeitig.** In der Vorlesung werden Sie in schneller Folge mit neuen Konzepten (Inhalten) *und* neuen Argumentationsformen (Logik) konfrontiert. Das müssen Sie auf jeden Fall in Ihrer persönlichen Geschwindigkeit verarbeiten.
Da es nicht möglich ist, bei der Darstellung des Materials in der Vorlesung stets die kleinstmöglichen logischen Argumentationsschritte zu machen, ist es dringend angeraten, dass Sie diese Schritte *selbständig* nachträglich hinzufügen, bis Ihnen absolut klar ist, wie die präzise Darstellung des Beweises aussehen müsste. Dies hat mehrere Vorteile

- Sie müssen eigenständig argumentieren und Symbole benutzen (Sprache/Schrift lernen)
- Sie wiederholen die Vorlesung gründlich
- Sie merken, ob und was Sie nicht verstehen
- Sie gewinnen Sicherheit auf dem Level der präzisesten Darstellung. Erst wenn Sie diese Sicherheit haben, können Sie sich auf

Ebenen begeben, wo die Präzision etwas in den Hintergrund und die Ideen etwas in den Vordergrund treten.

2.5. **Kreativität und Anschauung.** Nach dem bisher Gesagten mag es so aussehen, als ob die Mathematik eine Maschinerie sei, um mit vorgegebenen Schlussregeln aus wahren Aussagen andere wahre Aussagen abzuleiten. Diese Sichtweise ist allerdings sehr verkürzt und würde sicherlich nicht erklären, warum sich viele Menschen leidenschaftlich mit Mathematik beschäftigen. Mathematik machen ist tatsächlich ein kreativer Prozess und ähnelt oft einer Schatzsuche verknüpft mit Gefühlen wie Spannung, Freude, Ehrgeiz, Wut, Überraschung, Frustration, Mühe, Euphorie und Glück. Kreativität ist gefordert, um in einer bestehenden Theorie neue Fragestellungen zu formulieren bzw. neue Zusammenhänge zwischen den Objekten der Theorie zu entdecken. Besonders reizvoll ist es auch, Fragestellungen anderer Wissenschaften zu mathematisieren d.h. mathematische Objekte zu kreieren bzw. zu definieren, um die Fragestellung mathematischen Methoden zugänglich zu machen (diese Arbeit wird als mathematisches *Modellieren* bezeichnet). Ist die Fragestellung in Mathematik übersetzt, ergeben sich schnell interessante Folgefragen (hin und wieder auch ganz neue Theorien) und es hat einen besonderen Reiz, die gefundenen mathematischen Ergebnisse in die Sprache des Ausgangsproblems rückzuübersetzen. Auch wenn es darum geht, eine mathematische Aussage zu beweisen, ist viel Kreativität gefordert. Beweisen geht nicht nach Rezeptbuch! (Im Gegensatz zum Nachvollziehen von Beweisen, was eine fast mechanische, durchführbare Aufgabe ist.) Einen Beweis zu finden gleicht eher dem Zusammensetzen eines Puzzles mit der zusätzlichen Schwierigkeit, dass mehr Teile als benötigt zur Verfügung stehen. Das Puzzlebild (die mathematische Aussage) ist bekannt aber wie setzt man es zusammen? Gewisse Techniken gibt es natürlich schon, aber klare Rezepte wie z.B. „nimm ein Teil und probiere alle anderen durch, bis ein passendes Nachbarteil gefunden ist" funktionieren nur bei sehr kleinen Puzzles. Die Baustrategien sind eher vage und oft abhängig vom Puzzlebild (z.B. „fange mit Randstücken an", „suche Teile mit ähnlicher Farbe oder Textur"). Auf jeden Fall erfordert Puzzle bauen Kombinationsgabe, Spürsinn und Mustererkennung. Genau das gleiche gilt beim Beweisen und wie beim puzzlen ergibt sich die Regel „Wenn es nicht auf Anhieb klappt, nicht einfach aufgeben, sondern an einer anderen Ecke einen neuen Anlauf versuchen".

Eine wichtige Voraussetzung um mit mathematischen Objekten kreativ zu arbeiten ist Anschauung. Zu jedem abstrakten Objekt muss man gute Beispiele kennen und unterschiedliche Anwendungsmöglichkeiten selbst ausprobiert haben. Nur diese Vertrautheit erlaubt es, ein Objekt kreativ einsetzen zu können. Dabei unterscheiden sich mathematische Objekte und Konzepte nicht von anderen Werkzeugen wie etwa den Werkzeugen eines Tischlers. Um mit ihnen kreativ arbeiten zu können muss man die verschiedenen Einsatzmöglichkeiten an konkreten Beispielen studiert haben. Dass viel Übung nötig ist, um mit den Werkzeugen kunstvoll umgehen zu können, versteht sich von selbst. Das Gleiche gilt für die mathematischen Werkzeuge.

2.6. **Forschen statt pauken.** In der Schule wurde Ihnen das Wissen in kleinen wohldosierten Dosen verabreicht. Es war stets klar, was gerade gelernt wurde und jedes Konzept wurde hinreichend lange eingeübt. Das ist an der Universität anders. Hier steht das selbständige Lernen im Vordergrund. Sie müssen selbst das für Sie passendste Lehrmaterial auswählen, Sie müssen selbst überprüfen, was Sie bereits gut und was noch nicht so gut verstanden haben, um dann gezielt an den Problemstellen zu arbeiten. Sie müssen lernen, kritisch mit sich selbst zu sein, eigene Fragen formulieren zu Dingen, die Sie nicht richtig verstehen und dann gezielt nach Antworten auf diese Fragen suchen, durch Selbstdenken, in Büchern, oder bei Ihren Mitstudierenden oder Lehrern. Mit dieser Einstellung werden Sie zu einem Forscher bzw. einer Forscherin und das ist ein wichtiges Ziel der Ausbildung an der Universität.

3. Logik auf den Punkt gebracht

In diesem Abschnitt wollen wir den Prozess des logischen Schließens untersuchen und damit zusammenhängende intuitive Vorstellungen präzisieren. Zunächst stellen wir fest, dass logisches Argumentieren ein bestimmtes *Verknüpfen von Aussagen* bedeutet. Dabei bezeichnet im Folgenden eine Aussage einen Sachverhalt, der entweder wahr (1) oder falsch (0) ist. Weitere Wahrheitswerte wie z.B. „möglich" sind in der *zweiwertigen* Logik nicht zugelassen. Es gibt durchaus grammatikalisch korrekte Sätze, die weder wahr noch falsch sein können, z.B. der Satz

„Diese Aussage ist falsch"

Wäre die Aussage wahr, dann wäre sie falsch; wäre sie falsch, dann wäre sie wahr. Das Problem in dieser Aussage ist der Selbstbezug!
Ein Satz: „Peter hat rote Haare" ist eine Aussage (in einem Kontext, wo Peter eindeutig eine Person beschreibt), selbst wenn Sie Peter nicht kennen und deshalb der Wahrheitswert nicht *bekannt* ist. Es ist nur wichtig, dass die Aussage entweder wahr oder falsch ist.

Wenn Sie verschiedene Beispiele für „logisches Schlussfolgern” betrachten, merken Sie, dass dieser Prozess gar nicht vom Inhalt der Aussagen abhängt.
Man kann sich also Gedanken über Logik an sich machen. Zum Beispiel werden Sie folgende Argumentation eines Technikers wohl richtig finden, obwohl Sie die Details nicht verstehen.
„Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor. Die Taktstörung ist es diesmal nicht. Also haben wir einen Kriechstrom im Bereich der Sensorik”.
Warum wir diese Argumentation als solche richtig finden, obwohl wir die beteiligten Aussagen nicht verstehen (und auch deren Wahrheitsgehalt nicht wirklich kennen), wollen wir im folgenden systematisch untersuchen. Zunächst sammeln wir die beteiligten *elementaren Aussagen.*
A = „Es liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer vor.”
B = „Es liegt ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.”
Diese Aussagen werden in der Argumentation des Technikers in einer bestimmten Weise miteinander verknüpft. Zunächst erkennen wir die oder-Verknüpfung:
„Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer *oder* ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.”
Diese Verknüpfung ist sinngemäß identisch mit

$$C = A \text{ oder } B \qquad \text{kurz} \qquad C = A \vee B$$

Als nächstes bemerken wir, dass die Teilaussage „Die Taktstörung ist es diesmal nicht” sinngemäß mit der *Verneinung* von A identisch ist

$$D = \text{nicht } A \qquad \text{oder kurz} \qquad D = \neg A.$$

Da die beiden ersten Sätze gleichrangig nebeneinander stehen liegt hier (sinngemäß) eine und- Verknüpfung vor. Man kann nämlich statt
„Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor. Die Taktstörung ist es diesmal nicht.”
auch sagen
„Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor *und* die Taktstörung ist es diesmal nicht.”
Die neue Teilaussage $E = C$ und D wird auch mit $E = C \wedge D$ abgekürzt.
Die Gesamtaussage ist schließlich eine *Implikation*, da der Techniker ja die Aussage B aus $E = C \wedge D$ schlussfolgert. Dies wird an dem Wort „Also” deutlich. Bezeichnen wir die Gesamtaussage mit G, so

ist G = (aus E folgt B), oder $G = (E$ impliziert $B)$, oder symbolisch $G = (E \Rightarrow B)$. Zur Bildung der Gesamtaussage haben wir die Verknüpfungsoperationen $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow$ benutzt. Expandiert ergibt sich

$$G = [(A \vee B) \wedge (\neg A)] \Rightarrow B$$

Dies ist die (stark komprimierte) Form der Argumentation des Technikers. Setzen Sie für A, B doch einfach mal andere Aussagen ein, z.B.

A = „Der Hund bellt".
B = „Die Karawane zieht weiter".

Die Gesamtaussage ist dann
„Da der Hund bellt oder die Karawane weiterzieht und der Hund nicht bellt, zieht die Karawane weiter."
Die Tatsache, dass wir eine solche Argumentation unabhängig vom Inhalt als richtig empfinden, sollte sich dadurch äußern, dass die Implikationsaussage

$$(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$$

unabhängig von den Aussagen A, B wahr ist, d.h. eine sogenannte *Tautologie* darstellt. Es geht also um die Frage, ob prinzipiell richtig gefolgert wird und *nicht* ob die Folgerung richtig ist (das hängt ja vom Wahrheitswert der Aussage B ab). Umgangssprachlich trennt man diese beiden Aspekte oft nicht voneinander was zur Verwirrung führen kann.
Um diese Verwirrung zu verhindern, hat man sich in der Mathematik auf klare Regeln geeinigt, wie mit den Verknüpfungs-Symbolen $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow$ bzw. den zugehörenden Worten umzugehen ist.
Insbesondere wird sichergestellt, dass bei der Verknüpfung von Aussagen wieder Aussagen entstehen, d.h. Sachverhalte die entweder wahr oder falsch sind. Der Wahrheitswert einer verknüpften Aussage soll dabei aus den Werten der beteiligten elementareren Aussagen bestimmt werden können.
Betrachten wir als Beispiel die Verneinung $\neg$. Wenn eine Aussage A wahr ist, dann ist $\neg A$ nicht wahr also falsch (da wir uns auf Zweiwertigkeit geeinigt haben). Umgekehrt ist $\neg A$ wahr, wenn A falsch ist. Diesen Sachverhalt fasst man in einer sogenannten Wahrheitstabelle zusammen

A	¬ A
0	1
1	0

Die Wahrheitstabelle für die oder- Verknüpfung ergibt sich folgendermaßen: $A \vee B$ ist wahr, wenn A wahr ist, oder B wahr ist

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Beachten Sie, dass $A \vee B$ auch wahr ist, wenn A und B wahr sind. Es handelt sich also hierbei *nicht* um das entweder -oder sondern um das und -oder. Das ist einer der ersten Punkte, an denen die mathematische Sprache von Ihrer gewohnten Umgangssprache abweichen kann, sofern sie „oder" synonym für „entweder -oder" benutzen. In der Mathematik ist die Wahrheitstabelle für „oder" *verbindlich*. Für die entweder-oder Verknüpfung gibt es ein spezielles Symbol $A \oplus B$ mit der Wahrheitstabelle

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(dies entspricht der binären Addition ohne Übertrag, was das $\oplus$ Zeichen erklärt). Die verknüpfte Aussage $A \wedge B$ ist dann wahr, wenn A wahr ist und B wahr ist, also

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Betrachten wir nun die Implikationsverknüpfung $A \Rightarrow B$. Unter welchen Umständen würden Sie sagen, dass die Aussage „aus A folgt B" richtig bzw. falsch ist?
Wie schon angedeutet, ist diese Frage etwas kniffelig, da wir die Antwort immer an einen kausalen Zusammenhang zwischen A und B knüpfen wollen und das funktioniert nicht, wenn die Aussagen gar nicht

bekannt sind. Den Wahrheitswert „hängt davon ab” gibt es aber in der zweiwertigen Logik nicht. Es stellt sich heraus, dass nur eine ganz bestimmte Wahrheitstabelle für $A \Rightarrow B$ mit unserer intuitiven Vorstellung gut zusammenpasst.

A	B	A $\Rightarrow$ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Trotzdem ist diese Tabelle möglicherweise gewöhnungsbedürftig, da die Aussage $A \Rightarrow B$ immer wahr ist, wenn A falsch ist, d.h.

- Es ist wahr, dass eine falsche Aussage jede andere Aussage impliziert.

Entsprechend legt die Tabelle fest:

- Es ist wahr, dass eine wahre Aussage jede wahre Aussage impliziert.
- Es ist falsch, dass eine wahre Aussage eine falsche Aussage impliziert.

Beachten Sie nochmal, dass $A \Rightarrow B$ nicht bedeutet „ich kann mit der Voraussetzung A beweisen, nachrechnen oder schlussfolgern, dass B stimmt”.
Es handelt sich um eine reine Aussagenverknüpfung wie „und” „oder”, „nicht” - sonst gar nichts.
Zum Beispiel ist

$$1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 2$$

eine gültige Aussage, mit dem Wahrheitswert falsch und

$$1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 3$$

ist eine wahre Aussage.
Insbesondere sagt $A \Rightarrow B$ alleine *nichts* über den Wahrheitswert von B aus! Nur wenn bekannt ist, dass A wahr ist *und* $A \Rightarrow B$ wahr ist, dann kann man aus der Tabelle ablesen, dass auch B wahr ist. So benutzen wir Implikationen tatsächlich umgangssprachlich. Wenn Ihnen die Wahrheitstabelle für $\Rightarrow$ nicht intuitiv sinnvoll erscheint, so bleibt Ihnen nur übrig Ihre Intuition zu ändern! Die zweiwertige Aussagenlogik und damit die gesamte Mathematik die wir betreiben werden basiert nämlich auf genau dieser Tabelle. Allerdings würde das nie vernünftig funktionieren, wenn die Implikation der Aussagenlogik letztlich nicht doch genau die gesunde-Menschenverstand Implikation wäre, wenn Sie

sich also immer noch etwas unwohl fühlen kann ich Sie vielleicht folgendermaßen überzeugen.
Lassen wir die Wahrheitstabelle für $P \Rightarrow K$ zunächst variabel weil uns nicht alle Einträge klar sind.

Prämisse	Konklusion	
P	K	$P \Rightarrow K$
0	0	W_{00}
0	1	W_{01}
1	0	W_{10}
1	1	W_{11}

Offensichtlich gibt es $2^4 = 16$ mögliche Tabellen. Wir wollen jetzt nach dem Ausschlussprinzip vorgehen und alle Tabellen ausschließen die mit unserer natürlichen Vorstellung von $\Rightarrow$ in Konflikt stehen. Dazu müssen wir zunächst solche Eigenschaften sammeln, über die wir uns intuitiv einig sind.
Dass die Aussage $A \Rightarrow A$ unabhängig von der Aussage A richtig ist (d.h. eine sogenannte Tautologie darstellt) bereitet Ihnen wohl kein großes Unbehagen. Als Beispiel betrachten wir den Satz wenn Peter rote Haare hat dann hat Peter rote Haare. Dieser *Schlußfolgerung* werden Sie wohl zustimmen, selbst wenn Sie nicht wissen ob Peter rote Haare hat oder nicht. Auch werden Sie nicht daran zweifeln, dass $P \Rightarrow K$ selbst *keine* Tautologie ist, denn sonst würde es wahr sein, dass jede Aussage jede andere Aussage impliziert.
Eine weitere intuitiv nachvollziehbare Eigenschaft der Implikation sieht man an folgendem Beispiel, dass mit den Elementaraussagen
A = „Das Seil reißt", B = „Armin fällt", und C = „Beatrix fällt" arbeitet.
Wir betrachten die zusammengesetzte Aussage „Wenn das Seil reißt, fällt Armin, und wenn Armin fällt dann fällt Beatrix", also symbolisch $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
Diese Kette aus zwei Regeln impliziert mit dem natürlichen Implikationsbegriff *zwangsläufig* die neue Regel „Wenn das Seil reißt, dann fällt Beatrix", d.h. $(A \Rightarrow C)$. Zwangsläufig bedeutet dabei, dass die Gesamtaussage

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

von uns auf jeden Fall als korrekt (d.h. wahr) betrachtet wird. Dieser sogenannte *Kettenschluss* spiegelt dabei unsere Alltagserfahrung mit kausalen Zusammenhängen wider. Er beschreibt die korrekte Zusammenfassung einer Kette von Regeln und beschäftigt sich gar nicht mit dem Wahrheitsgehalt der beteiligten Elementaraussagen! Merken Sie, dass Sie den Kettenschluss akzeptieren, ohne zu wissen, ob das Seil reißt oder nicht bzw. ob Armin oder Beatrix tatsächlich fallen oder nicht. Wir haben also eine weitere intuitive Tautologie entdeckt, denn wir betrachten

$$T = ([(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C))$$

als wahr unabhängig vom Wahrheitsgehalt der beteiligten Aussagen.
Um die noch unbestimmten Wahrheitswerte der Implikationstabelle zu ermitteln können wir uns nun nacheinander die 16 möglichen Tabellen vornehmen und jeweils überprüfen, ob sie unseren intuitiven Anforderungen genügen. Dabei stellt sich heraus, dass die oben angegebene Tabelle die einzige Möglichkeit ist, für die

$$A \Rightarrow A \qquad \text{und} \qquad [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Tautologien sind, aber $A \Rightarrow B$ keine Tautologie ist. Damit die intuitiven Forderungen gelten, *müssen* wir also die etwas-nicht-intuitive Wahrheitstabelle akzeptieren.
Übrigens, falls Sie nicht alle Tabellen durchgehen wollen, gibt es auch eine etwas geschicktere Methode. Schauen wir uns dazu die Tabelle von $A \Rightarrow A$ an.

A	$A \Rightarrow A$
0	W_{00}
1	W_{11}

Da $A \Rightarrow A$ eine Tautologie sein soll, können wir uns sofort auf die vier Tabellen konzentrieren, für die $W_{00} = W_{11} = 1$ gilt. Darunter befindet sich auch die Tabelle $W_{00} = W_{01} = W_{10} = W_{11} = 1$, die wir verwerfen können, da $A \Rightarrow B$ ja *keine* Tautologie sein soll.
Es bleiben also noch drei Tabellen übrig wobei $W_{00} = W_{11} = 1$ gilt und mindestens einer der beiden Werte W_{01}, W_{10} gleich 0 ist. Benutzen wir nun die Tautologie T, im Fall $W(A) = W(C) = 1$ und $W(B) = 0$, wobei $W(\cdot)$ den Wahrheitswert einer Aussage bezeichne. Es gilt dann entsprechend der Implikationstabelle $W(A \Rightarrow B) = W_{10}, W(B \Rightarrow C) = W_{01}$ und $W(A \Rightarrow C) = W_{11} = 1$. Da entweder $W_{01} = 0$ oder $W_{10} = 0$ ist, ergibt die und-Verknüpfung $W((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) = 0$ und ein erneuter Blick auf die Implikationstabelle zeigt $W(T) = W_{01}$. Da T eine Tautologie sein soll, müssen wir uns auf die Tabelle mit $W_{01} = 1$

festlegen, d.h. die einzige Tabelle, die allen unseren intuitiven Anforderungen entspricht ist die mit $W_{00} = W_{01} = W_{11} = 1$ und $W_{01} = 0$.
Kommen wir nun zurück zu unserem Ausgangsbeispiel
A = "Es liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer vor."
B = "Es liegt ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor."
Die Schlussfolgerung des Technikers

$$((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$$

empfanden wir dabei intuitiv als logisch korrekt. Jetzt können wir nachrechnen, dass unser Gefühl für logische Korrektheit tatsächlich ein Gefühl für Tautologien ist. Notieren wir unter den Elementaraussagen die möglichen Wahrheitswerte und unter den Verknüpfungszeichen die Werte der entsprechen verknüpften Aussagen, so ergibt sich

((	A	∨	B	)	∧	¬	A	)	⇒	B
	0	0	0		0	1	0		**1**	0
	0	1	1		1	1	0		**1**	1
	1	1	0		0	0	1		**1**	0
	1	1	1		0	0	1		**1**	1

Da die Gesamtaussage unabhängig von den beteiligten Wahrheitswerten stets wahr ist, handelt es sich um eine Tautologie.
Gleiches gilt für andere vertraute Schlussweisen, z.B. ist

$$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$$

eine Tautologie, wie man leicht nachrechnet

((	A	⇒	B	)	∧	A	)	⇒	B
	0	1	0		0	0		**1**	0
	0	1	1		0	0		**1**	1
	1	0	0		0	1		**1**	0
	1	1	1		1	1		**1**	1

Probieren Sie einfach aus, ob diese Tautologie in einem konkreten Fall tatsächlich logisch korrekt erscheint. Mit $A =$ „Das Seil reißt" und $B =$ „Armin fällt" ergibt sich „Das Seil reißt und wenn das Seil reißt, fällt Armin. Also fällt Armin." Hierbei haben wir aus stilistischen Gründen die Aussage umgestellt in die Form

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

Dürfen wir das einfach so? Beschreibt die umgestellte Aussage den gleichen Sachverhalt wie

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B?$$

Dies ist die Frage nach der Äquivalenz von Aussagen. Inzwischen wissen wir ja, dass der Wahrheitswert in verknüpften Aussagen entsprechend den Wahrheitstabellen aus dem Wahrheitswert der Teilaussagen gebildet wird. Ersetzen wir nun eine Teilaussage durch eine andere mit genau den gleichen Wahrheitswerten, ändert sich der Gesamtwahrheitsgehalt nicht. Zwei Aussagen, die den gleichen Wahrheitswert haben nennen wir *äquivalent*. Die Wahrheitstabelle der Äquivalenz ist also

D	E	D $\iff$ E
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nun kann man sehr leicht nachrechnen, dass die Aussagen $A_1 \wedge A_2$ äquivalent zur Aussage $A_2 \wedge A$, ist, d.h. dass

$$A_1 \wedge A_2 \iff A_2 \wedge A_1$$

eine Tautologie ist.

A_1	$\wedge$	A_2	$\iff$	A_2	$\wedge$	A_1
0	0	0	**1**	0	0	0
0	0	1	**1**	1	0	0
1	0	0	**1**	0	0	1
1	1	1	**1**	1	1	1

Aus diesem Grund ist dann auch

$$[((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B] \iff [A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B]$$

für jedes Paar von Aussage A, B eine wahre Aussage (da ja der Wahrheitswert der Prämisse auf beiden Seiten gleich ist).
Bevor wir die Beobachtungen dieses Abschnitts zusammenfassen, soll schnell noch ein kleiner Test durchgeführt werden, ob unsere formale Logik auch tatsächlich mit der Bauchlogik zusammenpasst. Aus wahrscheinlich nicht mehr genau lokalisierbarer Vorzeit ist Ihnen bekannt, dass wenn aus A die Aussage B folgt und aus B die Aussage A, dann sind A und B äquivalent.

Mit Symbolen geschrieben sollte also

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A) \Longleftrightarrow (A \Longleftrightarrow B)$$

eine Tautologie sein. Rechnen Sie es nach!
Im Folgenden werden wir uns nicht weiter mit Alltagsaussagen wie „Peter hat rote Haare" beschäftigen. Statt dessen betrachten wir mathematische Aussagen, die durch Verknüpfung von *vorgegebenen wahren* Elementaraussagen (sogenannten *Axiomen*) entstehen. Die Axiome stehen also am Anfang einer Theorie und alle Aussagen sind letzlich äquivalent zu mehr oder weniger lange Verkettungen dieser Elementaraussagen.
Wir fassen zusammen:

- Mathematische Aussagen sind nach bestimmten Regeln zusammengesetzte Verknüpfungen mathematischer Sprachelemente. Einer Aussage muss genau einer der beiden Wahrheitswerte (wahr oder falsch) zugeordnet werden können.
- Durch Verknüpfung von Aussagen mit „und", „oder", „impliziert", etc. entstehen weitere Aussagen, deren Wahrheitswerte sich aus den Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen eindeutig ableitet (mit Wahrheitstabellen).
- Logische Schlussfolgerungen entsprechen Tautologien, d.h. Aussagenverknüpfungen die unabhängig von den beteiligten Wahrheitswerten stets wahr sind.

Wir werden uns später an einigen Beispielen ansehen, wie mit logischen Schlussfolgerungen der Wahrheitswert einer Aussage bestimmt werden kann.