5. Beweise

Ein Satz ist eine wahre Aussage. Sein Beweis (d.h. der Nachweis der Wahrheit) besteht üblicherweise aus einer logischen Kette wahrer Aussagen, die am Ende die Aussage des Satzes impliziert.
Aus dieser Beschreibung erkennen Sie, dass Beweisen ein *rekursiver* Prozess ist: um zu zeigen, dass eine Aussage wahr ist, werden weitere wahre Aussagen und damit weitere Beweise benötigt. Teilabschnitte dieser rekursiven Reise enden immer dann, wenn eine Aussage auftritt, deren Wahrheitswert schon überprüft wurde (Satz), die als wahr angenommen wurde (Axiom), oder die nur eine sprachliche Vereinbarung widerspiegelt (Definition).
Bei jeder Teilaussage die nicht von diesem Basistyp ist, *muss* die Beweis-Reise allerdings weitergehen, wobei die gleichen Regeln gelten wie für den Beweis der Ausgangsaussage (das Wort *muss* ist hier die entscheidende Anleitung zu einem gültigen Beweis – solange Sie nicht auf einen Satz, eine Definition oder ein Axiom verweisen können *müssen* Sie weiter beweisen). Insgesamt ist die Reiseroute aber so zu wählen, dass mit jeder weiteren Teilaussage die Rückführung auf bekannte Sätze, Axiome oder Definitionen näher rückt. Da dieser Teil Planung und Kreativität verlangt (d.h. Verständnis der Aufgabenstellung, eine gewisse Übersicht über das Problem, eine Lösungsstrategie), lassen sich hier nur wenig Rezepte angeben. Durch eine klare *Strukturierung* lässt sich aber zumindest Konfusion vermeiden, so dass die Gedankenarbeit an der richtigen Stelle ansetzen kann. Hier ist ein Versuch der Strukturierung.

5.1. **Rekursives Rezept.** Die folgenden Regeln gelten für alle Aussagen, die in einem Beweis auftreten, also sowohl für die Ausgangsaussage (die eigentliche Behauptung) als auch für die Teilaussagen, die während der Beweisführung zu klären sind.

5.1.1. *Beim Aufschreiben ist Ordnung das ganze Leben.* Formulieren Sie die Aussage *präzise.* Dabei hilft die symbolische Schreibweise (Quantoren, logische Verknüpfungen, Mengen etc.), um Mehrdeutigkeiten der Alltagssprache zu verhindern.

5.1.2. *Auflösung von Definitionen.* Enthält die Aussage eine "Standardaussage", d.h. eine Aussage, die in ähnlicher Form immer wieder auftaucht und deshalb durch eine Definition abgekürzt wurde (z.B. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, f ist stetig, f ist differenzierbar, $\int_a^b f(x)dx = c$, etc.), so lösen Sie die Definition auf: ersetzen Sie die Standardaussage durch die in der Definition angegebenen äquivalenten und detaillierten Bedingungen. Anstelle von Definitionen kann man zur Auflösung von Standardaussagen aber auch Charakterisierungen verwenden (z.B. die $\epsilon - \delta$ Charakterisierung der Stetigkeit anstelle der lim-Definition). Je nach Situation kann es auch hilfreich sein, die Behauptung durch eine hinreichende Bedingung zu ersetzen (z.B. Stetigkeit durch Differenzierbarkeit). Dann ist natürlich mehr als nötig zu beweisen – aber warum nicht, wenn die Voraussetzungen das zulassen.

5.1.3. *Textversatzstücke und Fortsetzung der Rekursion.*

A) Die Aussage ist eine Implikation $A \Rightarrow B$.
Aus dem Bauch heraus (oder mit Hilfe der Wahrheitstabelle, wenn Sie sich nicht auf Ihren Bauch verlassen – was zu empfehlen ist) ist klar was zu tun ist: Sie nehmen an A ist wahr und zeigen, dass auch B wahr ist. In diesem Fall ist die Implikation wahr. Den verbleibenden Fall, dass A nicht wahr ist brauchen Sie nicht zu untersuchen, da in diesem Fall $A \Rightarrow B$ per Definition wahr ist. Im Beweistext schreiben Sie: ***Wir nehmen an,*** A ***ist wahr und müssen zeigen dass*** B ***wahr ist.*** Dies definiert auch sofort die nächste Teilaufgabe: mit der Aussage B zurück zu Abschnitt 5.1.1.

B) Allgemeiner gilt: ist die Aussage eine logische Verknüpfung von Aussagen, so sagt Ihnen die Wahrheitstabelle welche Wahrheitswerte für die beteiligten Aussagen zu überprüfen sind, damit die Verknüpfung wahr ist. Genauso können Sie hier durch Anwendung von Tautologien die Verknüpfung anders darstellen (z.B. ist eine Äquivalenz gleichbedeutend mit zwei Implikationen). Mit den erforderlichen Teilaussagen gehen Sie jeweils zurück zu 5.1.1

C) Die Aussage ist von der Form $\forall x \in M : A(x)$.
Die Aufgabe ist hier zu zeigen, dass die Aussage $A(x)$ für jede Wahl von $x \in M$ wahr ist (siehe Definition des Quantors $\forall$). Im Beweistext schreiben Sie: ***Sei*** $x \in M$***. Wir müssen zeigen, dass*** $A(x)$ ***wahr ist.*** Dies definiert auch sofort die nächste Teilaufgabe. Für das gegebene $x \in M$ muss nun die Aussage $A(x)$ validiert werden ... also mit der Aussage $A(x)$ zurück zu Abschnitt 5.1.1.

D) Die Aussage ist von der Form $\exists x \in M : A(x)$.
Hier wird es etwas kniffliger. Die Aussage verlangt die Angabe eines $x \in M$, so dass $A(x)$ wahr ist. Dieses Element x ist konkret anzugeben! Üblicherweise benötigt man zur Konstruktion von x wahre Aussagen, die im Beweis bereits aufgetreten sind (z.B. die

Voraussetzung wenn die Gesamtaussage eine Implikation ist), oder man erhält die Existenz durch Anwendung von Sätzen. Im Beweis schreibt man: ***Wir suchen ein*** $x \in M$***, so dass*** $A(x)$ ***gilt.*** Um klarer zu sehen, wie das x gewählt werden muss, gehen Sie mit $A(x)$ zurück zu Abschnitt 5.1.1. Sie arbeiten also rekursiv weiter um die Aussage $A(x)$ in eine handlichere Form zu bringen. Dabei müssen Sie aber von nun an Ihre Augen offen halten, ob ein x gefunden werden kann, so dass $A(x)$ gilt.

E) Sie können einen Satz anwenden, um die Aussage nachzuweisen. Schreiben Sie dazu den Satz noch einmal auf, und überprüfen Sie sorgfältig, ob alle Voraussetzungen erfüllt sind. Dabei können alle wahre Aussagen, die im Beweis bis zu diesem Punkt schon aufgetreten sind benutzt werden. Vorsicht: benutzen Sie beim Aufschreiben des Satzes Bezeichnungen, die nicht mit bereits benutzten Bezeichnungen im Beweis kollidieren.

F) Sie kommen mit der Aussage nicht weiter. Denken Sie daran, dass manchmal ein indirekter Beweis helfen kann. Sie formulieren dazu (mit Hilfe einer logischen Tautologie) die Aussage um. Statt z.B. eine Implikation direkt zu beweisen, können Sie es mit einer Kontraposition oder einem Widerspruchsbeweis versuchen (Details siehe Vorkurs).

G) Falls Sie durch den Verlauf des Beweises daran zweifeln, ob die zu beweisende Aussage überhaupt stimmt, können Sie mit den bereits durchgeführten Schritten versuchen ein Beispiel zu konstruieren, so dass die zu beweisende Aussage logisch korrekt auf eine falsche Aussage führt. Dann haben Sie ein Gegenbeispiel und die Ausgangsfrage, wenn auch negativ, beantwortet.

5.2. **Training.** Um den Beweisprozess zu üben, beginnen Sie am besten mit ganz offensichtlichen Aussagen. In solchen Fällen ist der kreative Anteil des Beweises auf ein Minimum reduziert, so dass Sie sich ganz auf die Strukturierung konzentrieren können. Eine andere Möglichkeit ist, Beweise aus der Vorlesung oder aus Lehrbüchern *besser* d.h. im Sinne des obigen Rezepts zu strukturieren. Die benötigten Ideen sind dann bereits vorgegeben und es gilt nur noch, die vielen Lücken zu schließen (aus Gründen der Zeit- bzw. Druckkostenersparnis werden nämlich oft nicht alle Aussagen solange verfolgt, bis man auf einen Satz, ein Axiom oder eine Definition stößt). Als elementare Verhaltensregel beim sorgfältigen Beweisen gilt:

Egal was Sie hinschreiben, geben Sie ***immer*** *eine sorgfältige Begründung an! Als sorgfältige Begründungen zählen nur sorgfältige Anwendungen von Sätzen bzw. Definitionen, oder sorgfältige Begründungen.*

Die Verhaltensregel ist natürlich wieder *rekursiv*. Letztlich kann eine sorgfältige Begründung also nur mit einem Verweis auf einen Satz oder eine Definition enden.

5.2.1. *Ein einfaches Beispiel.* Dieses Beispiel ist während eines Gesprächs mit einer Studentin enstanden. Zunächst unterhielten wir uns über die Beschreibung von Sachverhalten mit Quantoren. Auf die Frage, wie man streng monoton wachsende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ charakterisiert, kamen wir nach einigen Skizzen von Funktionsgraphen auf die Bedingung

$$\forall x \in \mathbb{R} : \forall y > x : f(y) > f(x). \tag{1}$$

Die in der Vorlesung angegebene Definition

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow f(x) < f(y). \tag{2}$$

klingt zwar so ähnlich sieht aber formal anders aus. Ich forderte die Studentin auf, die Äquivalenz der beiden Bedingungen zu beweisen. Darauf erntete ich zunächst nur einen ungläubigen Blick und den Satz "Das ist doch klar". Dies ist eine typische Situation für einen einfachen Beweis und damit eine optimale Trainingssituation Beachten Sie, dass Sie sich solche Aufgaben leicht selbst basteln können, indem Sie gegebene Aussagen nach *Ihrem* Geschmack und Verständnis umformulieren und dann die Frage stellen, ob Sie den Sinn bei der Umformulierung geändert haben oder nicht.
Wenden wir jetzt aber mal das rekursive Rezept an. Wir beginnen mit Punkt 5.1.1 und räumen zunächst einmal auf. Die Aussagen um die es hier geht sind zwar klar, aber nicht ganz in Standardform. Die Standardform einer Allquantor-Aussage ist nämlich $\forall m \in M : A(m)$. In der Aussage (1) fehlt beim zweiten $\forall$ offensichtlich die Menge M. Das ist leicht repariert mit einem Intervall

$$A : \quad \forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in (x, \infty) : f(y) > f(x). \tag{3}$$

Die Aussage (2) ist ebenfalls nicht ganz sauber. Hier schreiben wir

$$B : \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow f(x) < f(y). \tag{4}$$

Die zu beweisende Aussage ist also von der Form $A \Leftrightarrow B$. Nach Rezept 5.1.3 Punkt (B) ersetzen wir die Aussage durch zwei Teilaussagen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, die jeweils bewiesen werden müssen. Wir beginnen mit $A \Rightarrow B$. Da es sich bei der Aussage um eine Implikation handelt, sagt uns 5.1.3 Punkt (A), dass der Beweistext *Wir nehmen an, A ist wahr und zeigen B.* lautet. Jetzt schauen wir uns an, was sich genau hinter B verbirgt. Wir müssen ja wissen *was* wir zu zeigen haben. Gemäss

(4) handelt es sich um eine Allquantor-Aussage so dass der nächste Beweistext durch 5.1.3 Teil (C) gegeben ist:
Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*. Wir müssen zeigen, dass* $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ *wahr ist.*
Im nächsten Rekursionsschritt ist also wieder eine Implikation zu zeigen, was mit 5.1.3 Punkt (A) zum Text *Wir nehmen an* $x < y$ *und zeigen* $f(x) < f(y)$*.* führt. Um schliesslich die Aussage $f(x) < f(y)$ zu zeigen, greifen wir auf die Voraussetzung, d.h. auf die Aussage A zurück. Um diese anwenden zu können, sind aber zunächst einige kleine Vorbereitungen nötig.
Da A als wahr angenommen ist (siehe (3)), könnten wir die enthaltene Aussage $f(y) > f(x)$ benutzen, sofern wir in der Lage sind nachzuweisen, dass $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (x, \infty)$ gilt. Was wissen wir über die von uns benutzten Größen x und y? Um diese Frage zu beantworten müssen Sie den bisherigen Beweistext lesen. Da steht sauber und ordentlich genau das, was wir über die relevanten Grössen wissen. In diesem Fall sind es zwei Aussagen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $x < y$.
Nach Definition von $\mathbb{R}^2$ folgt aus $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dass $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Ausserdem folgt mit der Definition des Intervalls

$$(x, \infty) = \{u \in \mathbb{R} \,|\, x < u\}, \tag{5}$$

und den beiden Aussagen $y \in \mathbb{R}$ und $x < y$, dass tatsächlich $y \in (x, \infty)$ gilt. Beachten Sie, dass zur Begründung der letzten beiden Aussagen $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (x, \infty)$ jeweils Definitionen zur sorgfältigen Begründung angegeben wurden.
Insgesamt sagt uns jetzt die Voraussetzung, dass wie gewünscht $f(x) < f(y)$ gilt, womit der erste Teil des Beweises beendet ist.
Wenden wir uns nun der Implikation $B \Longrightarrow A$ zu. Die Beweiszeile lautet also gemäß 5.1.3 Punkt (A) *Wir nehmen an,* B *sei wahr und zeigen* A*.* Da A von der Form $\forall x \in \mathbb{R} : C(x)$ ist, führen wir mit 5.1.3 Punkt (C) den Beweis fort. *Sei* $x \in \mathbb{R}$*. Wir müssen zeigen, dass* $C(x)$ *wahr ist.* Ein Blick auf (3) verrät, dass $C(x)$ gleich der Aussage $\forall y \in (x, \infty) : f(y) > f(x)$ ist. Erneut greifen wir zu 5.1.3 Punkt (C) und schreiben *Sei* $y \in (x, \infty)$*. Wir müssen zeigen dass* $f(y) > f(x)$ *ist.* Zum Nachweis der Aussage $f(y) > f(x)$ juckt es natürlich in den Fingern, unsere Voraussetzung d.h. Aussage B anzuwenden. Gemäss der Definition (5) des Intervalls (x, ∞) impliziert die Aussage $y \in (x, \infty)$ dass $y \in \mathbb{R}$ und $x < y$ ist. Ferner erkennen wir aus unserem bisherigen Beweis, dass $x \in \mathbb{R}$ gilt. Nach Definition von $\mathbb{R}^2$ folgt also $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Damit wissen wir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $x < y$, so dass die Voraussetzung B die Wahrheit der Aussage $f(x) < f(y)$ impliziert. Dies schließt den Beweis

ab. Fassen wir alles ohne Gemurmel zusammen, so ergibt sich nach einigen sprachlichen Umstellungen folgender Beweistext.

Satz 1. *Die beiden Aussagen*

$$A: \quad \forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in (x, \infty) : f(y) > f(x)$$

und

$$B: \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

sind äquivalent

Beweis: Um $A \Rightarrow B$ zu zeigen, nehmen wir an, A ist wahr und zeigen, dass B wahr ist. Um B zu zeigen, sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir müssen zeigen, dass $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ wahr ist. Um $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ zu zeigen, nehmen wir an $x < y$ und zeigen $f(x) < f(y)$. Da nach Definition von $\mathbb{R}^2$ sowohl $x \in \mathbb{R}$ als auch $y \in \mathbb{R}$ gilt und nach Definition von (x, ∞) die Aussage $y \in (x, \infty)$ richtig ist, können wir die Voraussetzung benutzen und erhalten $f(x) < f(y)$.
Um $B \Rightarrow A$ zu zeigen, nehmen wir an, B ist wahr und zeigen, dass A wahr ist. Um A zu zeigen sei $x \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass $\forall y \in (0, \infty) : f(y) > f(x)$ gilt. Sei dazu $y \in (0, \infty)$. Wir müssen zeigen, dass $f(y) > f(x)$ ist. Nach Definition des Intervalls (x, ∞) ist aber $y \in \mathbb{R}$ und $x < y$. Da auch nach Definition von $\mathbb{R}^2$ das Paar (x, y) in $\mathbb{R}^2$ liegt, folgt mit der Voraussetzung wie gewünscht $f(x) < f(y)$. ■

Diesen Beweis kann man natürlich deutlich straffen:
Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x < y$. Dann gilt $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (x, \infty)$ so dass mit A sofort $f(y) > f(x)$ folgt. Dies beweist die Aussage B.
Sei umgekehrt $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (0, \infty)$. Dann ist $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $x < y$ so dass mit B die Aussage A folgt. ■

Vergleichen Sie einmal beide Beweise. Ein großer Teil der ausführlichen Variante besteht darin, klar zu machen, was überhaupt zu zeigen ist. In der kurzen Variante kommt dieser Teil nur bruchstückhaft vor. So ist z.B. die Passage *Sei* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *mit* $x < y$. eine Kurzfassung der Auflösung des Allquantors und der Implikation. Außerdem taucht in der Kurzfassung der Verweis auf die Definition von $\mathbb{R}^2$ und (x, ∞) nicht auf. Streng genommen ist der kurze Beweis also nicht sorgfältig und nur für jemanden mit hinreichender Erfahrung wirklich unmittelbar zu verstehen.

5.2.2. *Eine Klausuraufgabe.*

Satz 2. *Seien* $a, c \in \mathbb{R}$ *und* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$, *so dass* $|f(x) - c| < \varepsilon$ *falls* $|x - a| < \delta$ *gilt, so ist* $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Zunächst bringen wir die Aussage in Quantorensprache, damit unser Rezept besser greifen kann. Wenn Sie diesen Schritt im Schlaf beherrschen, können Sie natürlich auch direkt mit dem Beweis loslegen. Die $\varepsilon - \delta$ Voraussetzung übersetzt sich so

$$A : \quad \forall \varepsilon \in (0, \infty) : \exists \delta \in (0, \infty) : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) : |f(x) - c| < \varepsilon$$

und die Behauptung ist

$$B : \quad \lim_{x \to a} f(x) = c.$$

Die zu beweisende Aussage ist also von der Form $A \Rightarrow B$, so dass der Beweis mit *Um* $A \Rightarrow B$ *zu zeigen, nehmen wir an,* A *sei wahr und zeigen, dass* B *wahr ist.*
Wie im vorangegangenen Beispiel schauen wir uns zunächst genau an, was eigentlich zu beweisen ist, d.h. wir formulieren B per Rezept solange um, bis wir einen Zusammenhang zur Voraussetzung erkennen. Da $\lim_{x \to a}$ nur eine Abkürzung für ein ganzes Grenzwertgewitter ist, benutzen wir zunächst 5.1.2, um Klarheit zu schaffen. Die Definition sagt im Fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \Longleftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$$

Arbeiten wir mit der aufgelösten Aussage weiter, so ergibt sich der Beweistext nach 5.1.3 Punkt (C). *Sei* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge. Wir zeigen*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = c.$$

Mit 5.1.3 Punkt (A) geht es weiter: *Wir nehmen an* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ *und zeigen* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$. Die nun zu beweisende Aussage

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c.$$

ist wieder eine Abkürzung hinter der sich eine präzise Handlungsanweisung versteckt. Allgemein gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0, \infty) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty) : |a_n - b| < \varepsilon.$$

Wenden wir diese Definition im Spezialfall $a_n = f(x_n), b = c$ an, so müssen wir also zeigen, dass

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty) : |f(x_n) - c| < \varepsilon$$

gilt. Mit 5.1.3 Punkt (C) geht unser Beweis weiter mit den Worten *Sei* $\varepsilon > 0$. *Wir zeigen, dass*

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty) : |f(x_n) - c| < \varepsilon$$

Die neue Aussage ist also vom $\exists$-Typ und 5.1.3 Punkt (D) sagt uns, dass der Beweistext folgende Form hat: *Wir suchen ein* $N \in \mathbb{N}$ *so dass* $\forall n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty) : |f(x_n) - c| < \varepsilon$ *gilt.*
An diesem Punkt ist die zu beweisende Aussage soweit aufgelöst, dass wir anfangen müssen zu denken, um weiterzukommen. Wieso sollte $f(x_n)$ nahe an c sein, wenn wir ein x_n mit grossem Index n einsetzen? Ein Blick auf die Voraussetzung liefert uns diesen Grund. Mit der Aussage A wissen wir nämlich, dass $f(x)$ nahe bei c ist, falls nur das Argument x nahe genug bei a ist. Etwas präziser müssen wir die Vorrausetzung A wie einen Satz anwenden. Beim Anwenden von Sätzen befolgen Sie bitte die folgende Regel: Schreiben Sie den Satz hin und ändern Sie dabei solche Variablennamen ab, die in der ursprünglichen Fassung (Skript, Buch, Erinnerung etc.) mit Variablennamen im laufenden Beweis zwar zufällig übereinstimmen, zwischen denen aber eigentlich gar kein Zusammenhang besteht. In unserem Fall ist die Aussage A z.B. mit einer Variable ε formuliert, aber in unserem Beweis kommt ε schon mit einer bestimmten Bedeutung vor (es ist ein positiver Toleranzwert, der für die Konvergenzüberprüfung von $f(x_n)$ benutzt wird). Wir schreiben deshalb A nocheinmal auf und ändern dabei ε überall durch den unverbrauchten Namen μ ab:

$$\forall \mu \in (0, \infty) : \exists \delta \in (0, \infty) : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) : |f(x) - c| < \mu.$$

Da diese Aussage nach unserer obigen Annahme wahr ist, gilt sie insbesondere auch für $\mu = \varepsilon$, da ε in unserem Beweis strikt positiv ist (siehe oben). Es gilt also

$$\exists \delta \in (0, \infty) : \forall x \in (a - \delta, a + \delta) : |f(x) - c| < \varepsilon$$

Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ ist, falls das Argument x nur nahe genug an a ist, d.h. falls $|x - a| < \delta$ gilt. Sind wir in unserem Beweis in einer solchen Situation, d.h. ist x_n nahe bei a wenn n genügend gross ist? Die Antwort kann nur unser bisheriger Beweistext liefern. Ein Blick nach oben zeigt alles war wir über x_n wissen: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge und $\lim_{n\to\infty} = a$.
Um weiter zu kommen, lösen wir die lim-Definition auf, die ja etwas über das Annäherungsverhalten von x_n zu a aussagt. Um nicht in Konflikt mit bereits benutzter Notation zu geraten, schreiben wir uns vorsichtshalber die Definition noch einmal mit unverbrauchten Variablennamen auf

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall \eta \in (0, \infty) : \exists M \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \cap [M, \infty) : |x_n - \alpha| < \eta.$$

Für den speziellen Fall $\eta = \delta$ erhalten wir also ein $M \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - \alpha| < \delta$ gilt falls $n > M$ ist.

Für solche Indizes gilt dann aber auch $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ nach Voraussetzung, so dass mit der Wahl $N = M$ ein geeigneter Wert gefunden ist. Damit ist der Beweis beendet. ■

Ohne das Zwischengemurmel und etwas umgestellt lautet er zusammengefasst.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge, welche gegen a konvergiert. Es ist zu zeigen, dass dann $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c strebt. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$. Da $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, existiert definitionsgemäß ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \in \mathbb{N} \cap [N, \infty)$ gilt $|x_n - a| < \delta$. Dies impliziert aber $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, d.h. nach Definition gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. ■

In dieser Form finden Sie den Beweis als Klausurmusterlösung. Wenn Sie die lange Fassung betrachten, merken Sie, wieviele kleine Schritte eigentlich in einem solchen Beweis stecken und wie dicht die kurze Fassung eigentlich ist. Nach ausreichend viel Übung werden Sie es schaffen, an alle kleinen Schritte zu denken und nur die wesentlichen Schritte hinzuschreiben (das sind die Schritte, die für den roten Faden der Argumentation entscheidend sind).

5.2.3. *Noch eine Klausuraufgabe.*

Satz 3. *Die Ableitung von $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Zeigen Sie, dass f auf (a, b) global Lipschitz-stetig ist.*

Wir beginnen mit 5.1.1 und führen die beiden Aussagen

$A : f'$ ist beschränkt $\qquad B : f$ ist global Lipsschitz stetig

ein, so dass $A \Rightarrow B$ zu zeigen ist. Wie in den vorangegangenen Beispielen konkretisieren wir zunächst die Behauptung durch Auflösen der Definition der globalen Lipschitz-Stetigkeit.

$$B \quad \Leftrightarrow \quad \exists L \in (0, \infty) : \forall x, y \in (a, b) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Hier wird ein wenig geschummelt, da die zweite Allquantor-Aussage nicht in der Standardform $\forall m \in M : A(m)$ vorliegt. Statt $\forall x, y \in (a, b)$ müssten wir strengenommen $\forall (x, y) \in (a, b)^2$ schreiben, wobei $(a, b)^2 = (a, b) \times (a, b)$ für die Menge aller Zahlenpaare steht, deren beide Komponenten aus dem Intervall (a, b) stammen. Die abweichende Schreibweise $\forall x, y \in (a, b)$ drückt das Gleiche aus, benötigt aber drei Zeichen weniger beim Aufschreiben. Wir immer gilt: abkürzende Schreibweisen dürfen benutzt werden, wenn der schreibenden Person klar ist, wie die ausführliche Form aussieht - vorausgesetzt natürlich, dass der Sinn immer noch klar hervorgeht.

Nun aber weiter im Beweis gemäss 5.1.3 Punkt (D) schreiben wir: *Wir suchen ein $L > 0$, so dass*

$$\forall x, y \in (a, b) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

gilt. Im Rezept steht nun: "um klarer zu sehen, wie L gewählt werden muss gehen Sie mit der Aussage

$$\forall x, y \in (a, b) : |f(x)x - f(y)| < L|x - y|$$

zurück zu Abschnitt 5.1.1. Dabei müssen Sie aber von nun an die Augen offen halten, ob ein solches L gefunden werden kann".
Machen wir also weiter. Mit 5.1.3 Punkt (C) schreiben wir
Seien x, y in (a, b). Wir müssen zeigen, dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.
Jetzt sind wir endgültig an einem Punkt angekommen, wo der Denkprozess einsetzen muss und das Rezept nicht mehr weiterhilft (beachten Sie aber auch, dass das Rezept uns schon sehr dabei geholfen hat, das Problem auf den Punkt zu bringen). Was wissen wir über die Differenz $f(x) - f(y)$ die hier abgeschätzt werden muss? Eine Verbindung zur Ableitung f' und damit zur Voraussetzung liefert der Mittelwertsatz. In's Unreine liefert der Mittelwertsatz $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, so dass also $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\ |x - y|$. Die Voraussetzung A bedeutet nun aufgelöst

$$A \quad \Leftrightarrow \quad \exists K \in (0, \infty) : \forall x \in (a, b) : |f'(x)| \leq K$$

so dass $|f'(\xi)|$ durch K abgeschätzt werden kann. Mit $L = K$ hätten wir damit die Bedingung erfüllt und der Beweis wäre beendet. Aber halt! Ist der Mittelwertsatz überhaupt anwendbar? Das muss man sich sorgfältig ansehen. Schreiben wir uns dazu den Mittelwertsatz so auf, dass wir mit der bisher benutzten Notation nicht in Konflikt geraten. Er handelt von Funktionen $g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $c < d$ die stetig auf $g : [c, d]$ und differenzierbar auf (c, d) sind und besagt, dass eine Stelle $\theta \in (c, d)$ existiert, so dass

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(\theta)$$

gilt. In unserem Fall sind $x, y \in (a, b)$ zwei Punkte für die uns der Zuwachs $f(x) - f(y)$ interessiert. Wir setzen also $d = \max\{x, y\}$ und $c = \min\{x, y\}$. Dann gilt sicherlich $c \leq d$ aber nicht unbedingt $c < d$, wie im Mittelwertsatz gefordert. Wir müssen also zwei Fälle unterscheiden. Ist $c = d$, so folgt $x = y$... Hätten Sie versucht, dies noch weiter zu begründen? Denken Sie daran, dass nur sorgfältige Begründungen erlaubt sind! Wir *beweisen* die Teilaussage durch Widerspruch. Nehmen wir also an $c = d$ und $x \neq y$. Dann gilt entweder (Axiom) $x < y$

oder $y < x$. Im ersten Fall

$$c = \min\{x, y\} = x < y = \max\{x, y\} = d$$

im Widerspruch zu $c = d$. Im zweiten Fall $y < x$ folgt genauso widersprüchlich $c < d$, so dass $x = y$ gelten muss.
Kommen wir zurück zur Hauptlinie des Beweises, so sehen wir, dass im bisher betrachteten Fall $x = y$ die Bedingung $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für *jedes* $L \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, da $0 \leq L \cdot 0$ wahr ist. Der Fall $x = y$ liefert also keine Einschränkung an L.
Im zweiten Fall $x \neq y$ folgt aber $c < d$ (Beweis? Wie oben!) so dass eine der Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt ist. Setzten wir nun $g = f$ und beachten, dass f differenzierbar auf $[c, d]$ und deshalb insbesondere stetig ist (Satz aus der Vorlesung), so sind *alle* Voraussetzungen nachgeprüft. Wir dürfen somit die Aussage des Satzes verwenden, d.h. es gibt ein $\theta \in (c, d)$ mit

$$|f(d) - f(c)| = |f'(\theta)|\ |d - c|$$

Nach der Voraussetzung gilt nun $|f'(\theta)| \leq K$ so dass

$$|f(d) - f(c)| \leq K|d - c|$$

folgt. Schliesslich bleiben zwei Fälle für die Zuordnung von x, y zu c, d. Ist $x < y$ so ist $c = x$ und $d = y$, also

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|.$$

Mit der Eigenschaft des Betrages $|-z| = |z|$ (Satz) folgt wie gefordert

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Im Fall $y < x$ ist $c = y$, $d = x$ und wir erhalten das gleiche Resultat. Insgesamt sehen wir, dass die Wahl $L = K$ die gewünschte Aussage zur Folge hat und damit ist der Beweis beendet. ∎

In aufgeräumter Form sieht der Beweis so aus: Das Ziel ist zu zeigen, dass es ein $L > 0$ gibt so dass $\forall x, y \in (a, b) : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ gilt. Seien dazu $x, y \in (a, b)$. Im Fall $x < y$ können wir den Mittelwertsatz anwenden und erhalten ein $\theta \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(\theta)(y - x)$$

Da nach Voraussetzung die Ableitung beschränkt ist, existiert ein $K > 0$, so dass $|f'(\omega)| \leq |C$ für alle $\omega \in (a, b)$. Nach Mulitplikation mit -1 und Betrag ziehen folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Im Fall $y < x$ erhalten wir die gleiche Abschätzung mit analogen Argumenten. Im verbleibenden Fall $x = y$ ist die Abschätzung sowieso erfüllt. Wählen wir also $L = K$, so ist der Beweis vollständig. ■

In der Trainingsphase sollten Sie auf jeden Fall alle Beweise erst sehr sorgfältig führen. In der Endversion können Sie Details weglassen (so wie im obigen Beispiel), wenn Sie vorher eine sorgfältige Begründung gegeben haben.

5.2.4. *Nachbereitung der Vorlesung.* In der Vorlesung werden Beweise üblicherweise knapp präsentiert, so dass einerseits die Beweisidee deutlich wird und andererseits der Zeitaufwand gering bleibt. Mit ein wenig Übung können Sie solche Vorgaben rasch in die oben diskutierte sorgfältige Form bringen. Als Beispiel für so eine Nachbereitung betrachten wir folgendes Beispiel.

Lemma 1. *Cauchy Folgen sind beschränkt.*

Beweis: Sei (a_n) Cauchy Folge. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt, falls $n, m \geq N$. Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |a_N| + \varepsilon\},$$

denn für $n \geq N$ mit $m = N$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|.$$

■

Diese Beweisskizze beinhaltet alle Ideen, aber schauen wir mal, ob er sorgfältig ist. Zunächst gehen wir zu 5.1.1 und formulieren die Aussage präzise:

$$\begin{array}{lll} A: & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \text{ist eine Cauchy Folge} \\ B: & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \text{ist beschränkt} \end{array}$$

Die Aussage ist dann von der Form $A \Rightarrow B$. Nach Rezept beginnt der Beweis gemäss 5.1.3 Punkt (A) mit *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy Folge. Wir zeigen, dass* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist.* Sie sehen, der zweite Satz, der die Aufgabenstellung noch einmal präzisiert ist im kurzen Beweis unterdrückt worden.
Folgen wir weiter dem Rezept, so ist nun die Aussage B aufzulösen gemäß der Definition der Beschränktheit

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ist beschränkt} \quad \Rightarrow \quad \exists K > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$$

Die Aufgabe des Beweises ist nach 5.1.3 Punkt (D) also *Wir suchen ein* $K > 0$ *so dass* $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$ *gilt.* Ein Blick auf die Beweisskizze zeigt, wie die Zahl K konstruiert wird. Offensichtlich geht hier die Voraussetzung A ein, die wir zunächst mit 5.1.2 behandeln

$$A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in (0, \infty) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Da die rechte Seite für alle $\varepsilon > 0$ wahr ist, können wir sie insbesondere im Fall $\varepsilon = 1$ erneut hinschreiben. Beachten Sie, dass aus der Äquivalenz nun eine Implikation wird

$$A \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < 1.$$

Weiter sehen Sie im Kurzbeweis, dass $m = N$ gesetzt wird, d.h. wir spezialisieren weiter

$$A \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$$

Mit der Dreiecksungleichung (Satz) erkennen wir also

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

falls $n \geq N$. Die meisten Folgenglieder sind somit betragsmäßig durch die Zahl $K_1 = |a_N| + 1$ abgeschätzt. Für die endlich vielen übrigen Folgenglieder gilt

$$|a_n| \leq K_2 = \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|\}, \qquad n \leq N - 1$$

Alle Folgenglieder sind also durch $K = \max\{K_1, K_2\}$ dominiert. Damit haben wir ein geeignetes K gefunden und der Beweis ist beendet. ■

Wenn Sie ganz penibel sind (das wäre toll) so würden Sie sich jetzt beschweren, dass die obige Begründung nicht sorgfältig ist, da in der Aussagenkette

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

nicht alle Schritte sorgfältig begründet, d.h. auf Satz, Axiom, oder Definition zurückgeführt wurden. Das stimmt. Es fehlen die Verweise auf Axiome (um $a_n = a_n - a_N + a_N$ zu begründen) und im Schritt $|a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ erneut der Verweis auf ein Axiom und die Aussage $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$. Sie sehen, sorgfältig sein ist sehr mühsam aber sehr lehrreich. Das Wichtige dabei ist, dass Sie ein scharfes Auge für fehlende Sorgfalt entwickeln und gleichzeitig Erfahrung und Wissen sammeln um unproblematische Sorglosigkeit (schnell behebbar) von problematischer Sorglosigkeit (komplizierte Argumentation fehlt) zu unterscheiden.
Jetzt sind aber endgültig Sie aber an der Reihe, die Beweise der Vorlesung durchzuackern und sorgfältig zu machen! Nur eigene Beschäftigung mit der Materie führt zum Lernerfolg. Und wenn Sie Ihre "Muskeln" mit vorgedachten Beweisen gestärkt haben, sind Sie in der Lage, selbst

Aussagen zu formulieren und deren Wahrheit sorgfältig nachzuweisen ... dann *machen Sie Mathematik*.