

Fachbereich Mathematik und Statistik WS 2005/06

$\mu$   $\Leftrightarrow$   $\gamma$   $\nabla$

## Einführungskurs Mathematik

$\vartheta$   $\varepsilon$    $\beta$   $\infty$

Michael Junk  
Universität Konstanz

$\Phi$   $\Sigma$   $\Psi$   $\xi$   $\forall$   $\int$

$\alpha$   $\delta$   $\subseteq$   $\xi$   $\Omega$

Mathematik Wieso-weshalb-warum

Warum Mathematik?

Zur Beschreibung von

- > Gesetzmäßigkeiten
- > Mustern
- > regelmäßigen Strukturen

mit dem Ziel, unsere Umwelt besser zu verstehen.

Mathematik Arbeitsweise

Besonderheit der Mathematik ...

- > präzise Sprache (basierend auf Mengenlehre)
- > spezielle Symbolik (hohe Informationsdichte)
- > präzise Argumentation (Logik)
- > deduktiver Aufbau der Theorie (axiomatische Methode)
- > Abstraktion (Konzentration auf das Wesentliche)

Mathematik Vorgehensweise

Arbeitsziel in der Mathematik ...

... sinnvoll motivierte Aussagen zu beweisen

↙ ↘

Eine Aussage beschreibt einen Sachverhalt, der entweder *wahr* oder *falsch* ist.

↙ ↘

Ableitung einer wahren Aussage aus anderen wahren Aussagen nach bestimmten *logischen Schlussregeln*

$\mu$   $\Leftrightarrow$   $\gamma$   $\nabla$

## Logik

$\vartheta$   $\varepsilon$   $\beta$   $\infty$

$\Phi$   $\Sigma$   $\Psi$   $\xi$   $\forall$   $\int$

$\alpha$   $\delta$   $\subseteq$   $\xi$   $\Omega$

Logik Aussagen

Eine Aussage beschreibt einen Sachverhalt, der entweder *wahr* oder *falsch* ist.

Peter hat rote Haare.

↙ ↘

... *ist* eine Aussage in einem Kontext, wo Peter eindeutig eine Person beschreibt

... *ist keine* Aussage in einer Gruppe, wo zwei Peter verschiedene Haarfarben haben

Bem: Sie müssen dazu nicht wissen, ob Peter rote Haare hat oder nicht

Logik Aussagen

---

Herzlichen Glückwunsch!

↙

... ist *keine* Aussage, da kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

---

Logik Aussagen

---

1 = 2

↙

... ist eine Aussage mit Wahrheitswert *falsch*.

---

Logik Aussagen

---

Jede gerade Zahl, die größer ist als 2, ist Summe zweier Primzahlen

↙

Das ist die *Godbachsche Vermutung*.  
Ihr Wahrheitswert ist unbekannt ... dennoch nimmt man an, dass sie entweder wahr oder falsch und damit eine Aussage ist.

---

Logik Aussagen

---

Diese Aussage ist falsch.

↙

... ist *keine* Aussage, da kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann: wäre die Aussage wahr, dann wäre sie falsch und wäre die Aussage falsch dann wäre sie wahr.

---

Logik Aussagen

---

$p$  ist eine Primzahl.

↓

... ist *keine* Aussage, da kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann.

Aber: wenn wir den Platzhalter  $p$  durch eine Zahl ersetzen, entsteht eine Aussage.

Wir nennen  $A(p) = „p \text{ ist eine Primzahl.}“$  eine Aussageform.

---

Logik Beispiel einer Schlussregel

---

Logische Argumentation eines Technikers:

*Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*

*Die Taktstörung ist es diesmal nicht.*

*Also haben wir einen Kriechstrom in der Sensorik.*

korrekte Schlussweise?

Inhalt verstanden?

---

Beispiel:

*Ich gehe Donnerstags in die Mathematik- oder in die Biologievorlesung.*

*An diesem Donnerstag fällt Mathe aus.*

*Also gehe ich in die Biovorlesung.*

Zusammenhang mit vorherigem Beispiel?

Wahrheitswerte bekannt?

Beispiel:

*Wenn  $p$  eine Primzahl oder eine gerade Zahl ist und  $p$  ist ungerade,*

*dann ist  $p$  eine Primzahl.*

gleicher logischer Schluss?

wieso?

Eine logisch korrekte Argumentation

- > drückt unsere gemeinsame *Welterfahrung* aus
- > ist unabhängig vom *Inhalt* der Aussagen
- > ist unabhängig vom *Wahrheitswert* der Aussagen
- > hängt von der *Verknüpfung* der Aussagen ab

*Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*

*Die Taktstörung ist es diesmal nicht.*

*Also haben wir einen Kriechstrom in der Sensorik.*

Elementare Aussagen:

$A =$  *Es liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer vor.*

$B =$  *Es liegt ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*

$A =$  *Es liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer vor.*

$B =$  *Es liegt ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*

Die zusammengesetzte Aussage

*Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*

entspricht der *oder*-Verknüpfung:  $C = A$  oder  $B$

Symbol:  $C = A \vee B$

↙  
Junktor

Angenommen  $A, B$  sind Aussagen.

Ist dann  $C = A \vee B$  wieder eine Aussage?

Beispiel:

$A =$  *Ich fahre heute.*

$B =$  *Ich fahre morgen.*

$A$	$B$	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Bem.: oder bedeutet nicht *entweder-oder*

Logik Analyse einer Schlussregel

---

Die Aussage: *Die Taktstörung ist es diesmal nicht.*  
 entspricht sinngemäß der Verneinung von:  
 $A = \text{Es liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer vor.}$   
 also:  $D = \text{nicht } A$       Symbol:  $D = \neg A$

statt  $f$  auch 0      

$A$	$\neg A$
0	1
1	0

      statt  $w$  auch 1

---

Logik Analyse einer Schlussregel

---

*Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*  
*Die Taktstörung ist es diesmal nicht.*  
 entspricht sinngemäß  $E = C$  und  $D$   
*Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor und die Taktstörung ist es diesmal nicht.*  
 Symbol:  $E = C \wedge D$

---

Logik und-Verknüpfung

---

Die *und*-Verknüpfung:      Merkgel: **And**

Beispiel:  
 $A = \text{Ich habe Hunger.}$   
 $B = \text{Ich habe Durst.}$

$A$	$B$	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

---

Logik Analyse einer Schlussregel

---

Gesamtaussage:  
 $E \hat{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen} \\ \text{Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der} \\ \text{Phylasensorik vor.} \\ \text{Die Taktstörung ist es diesmal nicht.} \\ \text{Also haben wir einen Kriechstrom in der Sensorik.} \end{array} \right.$   
 $\hat{=} B$   
 entspricht: aus  $E$  folgt  $B$       bzw.  $E$  impliziert  $B$   
 Symbol:  $G = (E \Rightarrow B)$

---

Logik Implikation

---

Wann ist die *impliziert*-Verknüpfung wahr oder falsch:  
 $(0 = 0) \Rightarrow \sqrt{2}$  ist irrational  
 $(0 = 0) \Rightarrow \exp(0) = 0$   
 $(0 = 1) \Rightarrow (0 = 0)$   
 $(0 = 1) \Rightarrow (0 = 2)$

Ex falso quod libet {

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prämisse      Konklusion

Also gilt z.B.:  $(1 = 0) \Rightarrow \text{Goldbachsche Vermutung}$

---

Logik Implikation

---

Achtung:  $A \Rightarrow B$  bedeutet (in der Aussagenlogik) nicht, „man kann mit  $A$  beweisen, dass  $B$  stimmt“  
 $A \Rightarrow B$  ist einfach eine verknüpfte Aussage, deren Wahrheitswert durch den von  $A$  bzw.  $B$  gegeben ist.  
 Bem.: intuitive Begründung der Tabelle siehe Skript

---