Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 24. Apr., SS 2006
Abgabe : 02. Mai bis 10 Uhr

Analysis II

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1: Standardabschätzung des Integrals

Für eine relle Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei $\|f\|_\infty := \sup\big\{|f(x)| \,:\, x \in [a,b]\big\}$. Man zeige: Ist f beschränkt und integrierbar auf $[a,b]$, so gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \|f\|_\infty \, |b-a|.$$

Aufgabe 1.2: Riemann-Stieltjes Integral mit Anwendung

Die experimentelle Ermittlung einer Größe liefert normalerweise keinen eindeutigen Wert sondern wegen Meßfehler oder natürlichen Streuungen ergibt sich eine ganze Verteilung von Werten. Diese Verteilung wird duch eine sogenannte Verteilungsfunktion F beschrieben. Liegen z.B. alle Meßwerte in einem Intervall (a,b), so ordnet $F : [a,b] \to [0,1]$ jedem $x \in [a,b]$ die Wahrscheinlichkeit zu, einen Meßwert mit Ausgang $\le x$ zu erhalten.

a) Begründen Sie die folgenden Eigenschaften der Verteilungsfunktion:
   - $F(a) = 0$
   - $F(b) = 1$
   - F ist monoton wachsend.

b) Geben Sie eine Verteilungsfunktion für den Ausgang eines Würfelwurfs an. Skizzieren Sie eine mögliche Verteilungsfunktion zur Windmessung an einem Tag mit Nordostwind.

Als konkretes Beispiel betrachten wir nun die indirekte Höhenmessung eines Baumes: Ermittelt man im Abstand L vom Baum den Winkel β, unter dem der Baum erscheint, so ist die Höhe durch $h(\beta) := L\tan\beta$ gegeben. Ist $F : [a,b] \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion der Winkelmesswerte und ist $Z \in \mathcal{Z}\big([a,b]\big)$ eine Zerlegung mit Elementen $a = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{N(Z)} = b$, so findet man Meßwerte im Teilintervall $I_k(Z) := (\beta_{k-1}, \beta_k]$ mit einer relativen Häufigkeit von $\Delta_k^F(Z) := F(\beta_k) - F(\beta_{k-1})$. Die zugehörigen Baumhöhen sind maximal $M(h, I_k(Z)) := \sup\{h(\beta) : \beta \in I_k(Z)\}$, so daß die Winkelmessungen $\beta \in I_k(Z)$ maximal mit $M\big(h, I_k(Z)\big)$ zum Mittelwert der möglichen Baumhöhen beitragen. Eine obere Abschätzung des Baumhöhenmittelwerts ist also

$$E^*(h,Z,F) := \sum_{k=1}^{N(Z)} M\big(h, I_k(Z)\big)\Delta_k^F(Z).$$

Analog erhält man eine untere Abschätzung durch

$$E_*(h,Z,F) := \sum_{k=1}^{N(Z)} m\big(h, I_k(Z)\big)\Delta_k^F(Z).$$

mit $m(h, I_k(Z)) := \inf\{h(\beta) \mid \beta \in I_k(Z)\}$. Tendenziell werden die Abschätzungen genauer bei Verfeinerung der Zerlegung.

c) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monoton wachsend*. Benutzen Sie die Ober- und Untersummen $E^*(f,Z,\alpha)$ und $E_*(f,Z,\alpha)$, um analog zur Definition des Riemann Integrals einen

Integralbegriff zu erklären (geben Sie eine präzise Definition an). Existenz vorausgesetzt spricht man vom *Riemann-Stieltjes* Integral von f bezüglich α und bezeichnet es mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x).$$

Falls Integrierbarkeit vorliegt, wäre also

$$\int_a^b L\tan(\beta)\,\mathrm{d}F(\beta).$$

der Erwartungswert der Baumhöhe.

d) Welche Resultate der Vorlesung (bis einschließlich des Satzes zur Integrierbarkeit monotoner und stetiger Funktionen) übertragen sich ganz/teilweise/nicht auf das Riemann-Stieltjes Integral?

e) Sei

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

und $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stetig. Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}H(x) \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^1 H(x)\,\mathrm{d}H(x)$$

f) Die Funktion H besitzt alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion. Was können Sie über das zugrunde liegende Experiment sagen?