Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 08. Mai, SS 2006
Abgabe : 15. Mai bis 10 Uhr

Analysis II

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1: Einfache Integrationsübung

a) Bestimmen Sie die folgenden eigentlichen und uneigentlichen Integrale.

i)	$\int \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$	ii)	$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x$	iii)	$\int \left[3\sin(x) - 4\sin^3(x)\right]\mathrm{d}x$
iv)	$\int_{-9}^{9} \left[2x^7 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{8}{3}\right]\mathrm{d}x$	v)	$\int_{-2/3}^{2/3} x^3(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$	vi)	$\int a^x\,\mathrm{d}x$
vii)	$\int \sqrt{ax+b}\,\mathrm{d}x$	viii)	$\int \frac{1}{a+bx^2}\,\mathrm{d}x$	ix)	$\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$
x)	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+x\ln^2 x}$	xi)	$\int \frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$		

b) Wie ist das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ in ein Integral über das Einheitsintervall $[0,1]$ zu überführen?

Hinweis: Die Bearbeitung der Aufgabe soll vollständige, nachvollziehbare Rechnungen bzw. sonstige Begründungen enthalten. Formelsammlungen bzw. Computeralgebra-Programme dürfen allenfalls zur Kontrolle der eigenen Lösung verwendet werden. Bei den unbestimmten Integralen kann die Lösung aber auch dank des Hauptsatzes durch Differenzieren eigenständig überprüft werden.

Aufgabe 3.2: Integrations-Spaß mit der Beta-Funktion

Für $x, y > 0$ definiert man die *Eulersche Betafunktion* durch das folgende parameterabhängige Integral

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

a) Begründen Sie, warum die obige Definition auch für $0 < x < 1$ oder $0 < y < 1$ Sinn macht. Wo liegt in diesem Falle das Problem?

b) Beweisen Sie, daß für natürliche Argumente $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$

c) Zeigen Sie, daß die Betafunktion alternativ zur obigen Definition auch durch folgende Integrale dargestellt werden kann:

$$\text{i)}\quad B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2x-1}\cos(\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{ii)}\quad B(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{\tau^{x-1}}{(1+\tau)^{x+y}}\,\mathrm{d}\tau$$

Berechnen Sie mit Hilfe von i) den Wert von $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Bemerkung: Die Betafunktion ist eng verwandt mit der bedeutsamen Γ-Funktion (Gammafunktion); es gilt $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ mit $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Dieser Zusammenhang bietet eine Möglichkeit, das für Anwendungen (z.B. in der Wahrscheinlichkeitstheorie) wichtige Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ zu berechnen. Sehen Sie wie?

Aufgabe 3.3: Hölder- und Minkowski-Ungleichung

Die Hölder- und Minkowski Ungleichung sind von grundlegender Bedeutung in der Theorie der Funktionenräume, welche sich ergeben, wenn man bestimmte Mengen von Funktionen mit der Vektorraum-Struktur versieht.

Welche Ihnen bisher bekannten Ungleichungen werden durch die Hölder- bzw. Minkowski Ungleichung verallgemeinert bzw. ergeben sich als Spezialfall?

Im folgenden seien $p > 1$ und $q > 1$ reelle Zahlen , welche der Bedingung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ genügen. Man spricht im Kontext der Aufgabe auch von *konjugierten* Exponenten. Die nachstehenden Behauptungen sind zu beweisen:

a) Für $u, v \geq 0$ gilt stets

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

wobei Gleichheit nur im Falle $u^p = v^q$ eintritt.

Tip: Sie können die Ungleichung auf verschiedene Weise herleiten. Eine Möglichkeit bietet Aufgabe 2.4 d). Stattdessen können Sie auch die Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $g(u) := \frac{u^p}{p} - uv$ für ein festes aber beliebiges $v \geq 0$ diskutieren.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \dots x_n$ und $y_1, ..., y_n$ nicht-negtive rellen Zahlen.

Dann gilt die *Hölder'sche Ungleichung*:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \;\leq\; \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad .$$

Anleitung: Nehmen Sie zunächst an, die x_k's und y_k's seien normiert, d.h. $\sum_{k=1}^{n} x_k^p = 1$ und $\sum_{k=1}^{n} y_k^q = 1$. Beweisen Sie dann unter Verwendung von a) die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq 1$. Führen Sie den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurück, indem Sie die x_k's bzw. y_k's jeweils mit einem geeigneten Faktor multiplizieren.

c) Seien nun $x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_n$ *beliebige* reelle Zahlen.

Dann gilt die *Minkowski'sche Ungleichung*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Anleitung: Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich zunächst

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \left(|x_k| + |y_k|\right)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \left(|x_k| + |y_k|\right)^{p-1} .$$

Wenden Sie nun die Hölder'sche Ungleichug an.

d) Lassen sich die beiden Ungleichungen auch auf Integrale übertragen?

Aufgabe 3.4: Ein Satz von Fejér[1]

Beweisen Sie: Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und ist g periodisch mit der Periode 1 $\big($also $g(x+1) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\big)$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) g(nx)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

[1] Ungarischer Mathematiker (1880-1959) mit Hauptarbeitsgebiet im Bereich der Fourier-Reihen sowie gleichnamige Provinz in Ungarn zwischen Donau und Plattensee.