Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 29. Mai, SS 2006
Abgabe : 06. Jun. bis 10 Uhr

Analysis II

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1: Äquivalenz von Metriken

Zwei Metriken $d_1, d_2 : X \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X heißen *äquivalent*, falls Konstanten $c > 0$ und $C > 0$ existieren, so daß für alle $x, y \in X$ gilt

$$c\, d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le C\, d_1(x,y).$$

a) Beweisen Sie: Durch die oben definierte Äquivalenz von Metriken ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Metriken über X definiert.

b) Zeigen Sie: Äquivalente Metriken induzieren dieselbe Topologie; insbesondere erzeugen sie die gleichen offenen Mengen sowie den gleichen Umgebungs-, Konvergenz- und Stetigkeitsbegriff.

c) Während im $\mathbb{R}^n$ alle Normen zueinander äquivalent sind, ist dies für Metriken nicht der Fall. Geben Sie hierfür ein Beispiel an und beschreiben Sie die verschiedenen Systeme offener Mengen.

Aufgabe 6.2: Vollständigkeit von $\mathcal{C}_b(M, \mathbb{R})$ in der Supremumsnorm

In der Vorlesung vom 15. Mai wurde gezeigt, daß die Menge der stetigen Funktionen auf einem Intervall nicht vollständig bezüglich der Integralnormen ist (Beispiel: Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen gegen eine unstetige Sprungfunktion). Da die Vollständigkeit für viele (mathematische) Fragestellungen und Anwendungen unverzichtbar ist, versieht man den Raum der stetigen Funktionen standardmäßig mit der Supremumsnorm.

Beweisen Sie, daß die Menge $\mathcal{C}_b(M, \mathbb{R})$ der stetigen, beschränkten (reellwertigen) Funktionen auf dem metrischen Raum (M, d) zu einem vollständigen, normierten Raum wird, wenn man sie mit der Supremumsnorm ausstattet. Zeigen Sie dazu insbesondere, daß $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy-Folgen stetiger Funktionen gegen stetige Funktion konvergieren.

Aufgabe 6.3: Stetigkeitsverhalten im Nullpunkt

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{und} \quad f(0,0) := 0.$$

hinsichtlich ihres Stetigkeitsverhaltens im Nullpunkt. Zeigen Sie, daß die Funktion dort weder stetig noch stetig fortsetzbar ist. **Tip:** Betrachten Sie den Grenzwert der Funktion auf verschiedenen Kurven, welche sich dem Nullpunkt annähern.

Begründen Sie die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := \begin{pmatrix} \arctan\left(x_1^2 \tan(\frac{x_4}{1+x_4^6}) + x_5 \sin(x_3)\right) \\ \exp(x_4^5) - 28/\cosh(x_1) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.4: Uneigentliche Integrale

Eigentlich ist das Thema (eindimensionale) Integration in der Vorlesung bereits abgeschlossen worden, daher soll es in dieser Aufgabe um die Berechnung *uneigentlicher* Integrale gehen. Das 'Witzige' daran ist, daß viele dieser Integrale analytisch berechenbar sind, obwohl man keinen analytischen Ausdruck für die Stammfunktion angeben kann (Achtung: Es wäre falsch zu sagen, daß keine Stammfunktion existiert.) Oftmals (aber bei weitem nicht immer) ist ein Grenzwert leichter zugänglich, als die Glieder der gegen ihn konvergierenden Folge.

Sei f eine in jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subset (0,\infty)$ integrierbare Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Existieren die Grenzwerte $A := \lim_{x\to 0} f(x)$ und $B := \lim_{x\to\infty} f(x)$ so gilt

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,\mathrm{d}x = (A - B)\,\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha}\right)$$

b) (freiwillig) Existiert das Integral $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ und gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = A$ so folgt für $\alpha, \beta > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,\mathrm{d}x = A\,\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha}\right)$$

c) (freiwillig) Falls umgekehrt das Integral $\int_0^b \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ für jedes $b > 0$ existiert und $\lim_{x\to\infty} f(x) = B$ vorhanden ist, gilt:

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,\mathrm{d}x = -B\,\ln\left(\tfrac{\beta}{\alpha}\right)$$

d) Berechnen Sie nun konkret die folgenden uneigentlichen Integrale:

i) $$\int_0^\infty \frac{\arctan(\pi x) - \arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

ii) $$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Tip: Weisen Sie zunächst die folgende Identität nach:

$$\int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$