



Analysis II

8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1: Partielles Differenzieren üben anhand einer PDG

Beschreiben Sie das räumliche Aussehen der Funktion (d.h. bzgl. x_1, x_2)

$$h(t, x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4\nu t}\right)$$

in Abhängigkeit der Zeit t ohne Zuhilfenahme eines dreidimensionalen Computerplots ihres Graphen. Die Temperaturverteilung u einer (unendlich ausgedehnten) Platte mit der Wärmeleitfähigkeit ν ist in Abwesenheit von Wärmquellen eine Lösung der folgenden Diffusionsgleichung

$$\partial_t u(t, x_1, x_2) - \nu(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)u(t, x_1, x_2) = 0.$$

Verifizieren Sie durch Einsetzen, daß h eine Lösung dieser Gleichung darstellt. Inwiefern stimmt das zeitliche Verhalten von h mit ihrer Alltagserfahrung überein?

Aufgabe 8.2: Abrollen & Co. (Parametrisierung ebener, kinematischer Kurven)

- Betrachtet man die Trajektorie (Bahnkurve) eines fixierten Punktes, welcher sich auf einem entlang einer Geraden abrollenden Kreis befindet, so ergibt sich eine Zykloide. Wie verändert sich die Kurve (bzw. ihre Parametrisierung), wenn der Abstand des fixierten Punktes zum Kreismittelpunkt nicht dem Radius entspricht?
- Auf bzw. in einem Kreis vom Radius R wird ein zweiter Kreis vom Radius r abgerollt. Welche Kurve beschreibt ein Punkt, der mit dem zweiten Kreis mitrotiert und sich im Abstand d von seinem Zentrum befindet?
- Auf einem Kinderspielplatz steht ein kleiner Bub im Zentrum einer sich ziemlich schnell rotierenden Scheibe. Ein Vogel gleitet geradlinig über den Kopf des Jungen hinweg. Entzückt verfolgt das Kind seine Flugbahn und ruft der Mutter zu: "Mami, guck mal, der Vogel fliegt ganz komisch!" Die Mutter blickt verwundert auf und schmunzelt über die Naivität ihres Spröblings, als sie den Vogel verschwinden sieht.

Wie sieht die Flugbahn in der Perspektive des Jungen aus? Wie ändert sie sich, wenn der Vogel nicht direkt über dem Jungen sondern einige Meter versetzt den Spielplatz überfliegt?

Wie realistisch finden Sie das Einleitungs-Geschichtchen? (Selbstversuch?!)

Anmerkung: Lassen Sie sich nicht den Spaß entgehen, die Kurven zu visualisieren.

Aufgabe 8.3: Reflektionen über Reflektionseigenschaften von Parabeln und Ellipsen

- Bekanntlich werden Parabolspiegel dazu genutzt, Strahlenbündel in einem Punkte zu fokussieren bzw. umgekehrt parallele Strahlenbündel zu erzeugen. Versuchen Sie dies (mathematisch) zu erklären.
- (freiwillig) Wie wird ein nicht achsenparalleles Strahlenbündel an einer Parabel reflektiert?
- Warum tragen die Foci (Brennpunkte) einer Ellipse ihre Namen zu Recht?

Zusatzfrage: Warum sind Ihrer Meinung nach TV-Parabolantennen so flach?

Aufgabe 8.4: Zusammenhang & Weg-Zusammenhang (freiwillig!)

Anschaulich bezeichnet man ein Gebiet (bzw. Menge) in der Ebene als *zusammenhängend*, falls alle Punkte des Gebiets gegenseitig erreichbar sind, ohne dabei das Gebiet verlassen zu müssen. Bereits im täglichen Leben läßt sich feststellen, daß diese einleuchtend klare Definition tatsächlich unserer Anschauung zuwider laufen kann. Dazu ein Beispiel:

Das Territorium des Landes Baden-Württemberg ist unserer Definition nach nicht zusammenhängend, da die Gemeinde Büsingen ganz von schweizerischem Gebiet umgeben ist. Es ist daher nicht möglich, Büsingen mit dem Auto anzufahren, ohne dabei ein Stück Schweiz zu durchqueren. Betrachten wir nun eine andere Situation: Bei geringen Geographiekenntnissen besteht wohl Einhelligkeit darin, daß das Staatsgebiet der Republik Österreich zusammenhängend ist. Doch ist dem wirklich so? Jeder, der einmal im Allgäu Urlaub gemacht hat, weiß, daß das Klein-Walser-Tal zu Österreich gehört, obwohl es nur von Deutschland aus zugänglich ist (zumindest in der Topologie eines Autofahrers). Dennoch wird man sich sträuben, das österreichische Territorium als unzusammenhängend zu bezeichnen, weil das Klein-Walser-Tal lediglich durch Berge nicht aber durch ein fremdes Gebiet vom Rest getrennt ist.

Die Verwirrung, die wir nun angerichtet haben, kann durch Einführung eines neuen Begriffs aufgelöst werden, welcher die Art des Zusammenhangs präzisiert.

Schlagen Sie den Begriff des *Weg-Zusammenhangs* nach und klären Sie sein Verhältnis zu dem bisherigen Begriff des Zusammenhangs. Diskutieren Sie in diesem Hinblick auch das obige Beispiel, wenn man das österreichische Staatsgebiet als eine offene Menge im \mathbb{R}^2 betrachtet.