



## Analysis II

### 11. Übungsblatt

#### Aufgabe 11.1: Parameterabhängige, invertierbare Matrizen

Für  $\epsilon > 0$  sei  $G : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig. Ferner sei  $G(0)$  invertierbar. Beweisen Sie, daß dann ein  $0 < \delta < \epsilon$  existiert, so daß  $G(x)$  invertierbar ist für alle  $x \in B_\delta(0)$  und  $G^{-1} : B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig ist.

#### Aufgabe 11.2: Zur Bedeutung der Ableitung

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(x_1, x_2) := (x_1, x_2, x_1^3 - 3x_1x_2^2)$ . Wählen Sie verschiedene Werte für  $x, y, h$  und berechnen Sie

- i)  $f(x+h) - f(x)$ ,
- ii)  $f'(x)h$ ,
- iii)  $J_f(x) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ ,
- iv)  $\|h\| D_{\frac{h}{\|h\|}} f(x)$ .

Was stellen Sie fest?

Geben Sie eine Parametrisierung der Tangentialebene an die Fläche in einem Punkt  $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$  an. Stellen Sie die Fläche als Niveaumenge einer Funktion  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dar. Berechnen Sie den Gradienten  $\nabla \phi$ . In welcher Beziehung steht dieser zu den Tangentialvektoren? Stellen Sie  $f([-1, 1]^2)$  und eine Tangentialebene mit Matlab dar. Wie so nennt man  $f(\mathbb{R}^2)$  *Affensattel*?

#### Aufgabe 11.3: Berechnung eines Differenzenquotienten

Sei  $u \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und

$$G_h := \frac{1}{4h} \left[ u(x+h, y+h) + u(x+h, y-h) - u(x-h, y+h) - u(x-h, y-h) \right]$$

Berechnen Sie den Grenzwert  $G := \lim_{h \rightarrow 0} G_h$ . Schätzen Sie den Fehler  $|G - G_h|$  in der Form  $|G - G_h| \leq Ch^\alpha$  mit möglichst großem  $\alpha$  ab. Mit welcher Ordnung wird der Grenzwert approximiert?