Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 10. Jul., SS 2006
Abgabe : 17. Jul. bis 10 Uhr

Analysis II

12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1: Seltsames!

Zeigen Sie, daß das Polynom $f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2-3x+y^2)+2x^2$ entlang *jeder* Geraden durch den Ursprung ein lokales Minimum hat, aber dennoch in $(0,0)$ *kein* lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 12.2: Zu den Lagrangeschen Multiplikatoren

Die minimale (euklidische) Distanz zwischen dem Punkt $(0,c) \in \mathbb{R}^2$ mit $c \in \mathbb{R}$ und der Parabel $\{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ soll berechnet werden.

a) Formulieren Sie die Fragestellung als Minimierungsproblem mit Nebenbedingung.

b) Zeichnen Sie die Menge in $\mathbb{R}^2$ sowie die Niveaulinien der zu minimierenden Funktion.

c) Lösen Sie das Problem mit Hilfe Lagrangescher Multiplikatoren.

d) Zeigen Sie, daß die Verbindungslinie zwischen dem Punkt $(0,c)$ und dem nächsten Punkt auf der Parabel die Kurve senkrecht durchschneidet.

Aufgabe 12.3: Eine implizit gegebene Lösung der Burgers-Gleichung

Sei $\Phi(t,x,u) = \exp(x-tu) - u$ für $t,x,u \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die implizite Gleichung $\Phi(t,x,u) = 0$ in der Umgebung von Punkten $(0,x,\exp(x))$ nach u aufgelöst werden kann.

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Auflösung $U(t,x)$ aus der impliziten Gleichung $\Phi(t,x,U(t,x)) = 0$ und zeigen Sie (durch Einsetzen), dass U folgende Differentialgleichung löst:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}(U(t,x))^2 = 0.$$