Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. Martin Rheinländer

Schein-Klausur

Analysis 2

28. Juli 2006

2. Iteration

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matr.–Nr.: ______________________________

Hauptfach: ______________________________

Nebenfach: ______________________________

Übungsgruppen-Nr.: ______________________________

Aufgabe	1)	2)	3)	4)	5)			$\sum$
maximal								
erreicht								

Endnote: ______________________________

Hinweise zur Bearbeitung der Klausur

(bitte sorgfältig lesen)

- Schalten Sie Ihr Handy aus – wenn Sie während der Klausur in- oder außerhalb des Hörsaals beim Telefonieren angetroffen werden, so wird dies als Täuschungsversuch gewertet.
- Es sind keine Hilfsmittel wie Taschenrechner, Vorlesungsskript, Merkblätter etc. zugelassen.
- Tragen Sie Name und Matrikelnummer auf jedem Blatt ein.
- Sie können Vorder- und Rückseiten benutzen, aber Antworten zur Aufgabe **N** immer nur auf Blättern zur Aufgabe **N** schreiben.
- Wenn bei einer Aufgabe der Platz nicht ausreicht, können Sie zusätzliche Blätter erhalten – schreiben Sie sowohl die Nummer der Frage als auch Name und Matrikelnummer oben auf das Zusatzblatt.
- Konzeptpapier wird ebenfalls gestellt. Versuchen Sie sauber zu schreiben und geben Sie keine Schmierblätter ab.
- Bei fast allen Aufgaben können die Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitet werden; lassen Sie sich also nicht entmutigen, wenn eine Teilaufgabe nicht klappt.
- Kommentieren Sie Ihre Rechnungen ausführlich; im Zweifel besser mehr als zu wenig. Resultate aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 2 Stunden.

Viel Erfolg!

Name: ____________________ **Matr.–Nr.:** ____________________ **Punkte:** ☐

Aufgabe 1: Integrieren

a) Berechnen Sie: $\int_0^\pi \exp(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$

b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die durch die Parametrisierung

$$\gamma : [0, \sinh(1)] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \tfrac{1}{2}t^2)$$

gegeben ist.

Lösung:

a) Zweimaliges partielles Integrieren liefert:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \underbrace{\exp(t)}_{=u'}\underbrace{\cos(t)}_{=v}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{e}^t\cos(t)\Big|_0^\pi \;+\; \int_0^\pi \mathrm{e}^t\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^\pi - 1 \;+\; \underbrace{\Big[\mathrm{e}^t\sin(t)\Big]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \mathrm{e}^t\cos(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Also: $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t\cos(t) = -\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^\pi + 1)$

b) Tangentialvektor: $\gamma'(t) = (1, t) \;\Rightarrow\; \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$ Die Länge der Kurve ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_0^{\sinh(1)} \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sinh(1)} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Substitution: $t = \sinh(u),\ \mathrm{d}t = \cosh(u)\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2(u)}\cosh(u)\,\mathrm{d}u && \Big|\ 1 = \cosh^2(u) - \sinh^2(u) \\ &= \int_0^1 \cosh^2(u)\,\mathrm{d}u && \Big|\ \text{partielles Integrieren} \\ &= \Big[\cosh(u)\sinh(u)\Big]_0^1 - \int_0^1 \sinh^2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \cosh(1)\sinh(1) + \int_0^1 \big(1 - \cosh^2(u)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \cosh(1)\sinh(1) + \int_0^1 \mathrm{d}u \;-\; L(\gamma)\end{aligned}$$

Also: $\displaystyle L(\gamma) = \int_0^1 \cosh^2(u)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\big(1 + \cosh(1)\sinh(1)\big)$

Name: ____________________ **Matr.–Nr.:** ____________________ **Punkte:** $\square$

Aufgabe 2: Metrisches

Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß dann auch (M, b) ein metrischer Raum ist, wenn b gegeben ist durch

$$b(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Lösung:
Zunächst betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to [0, 1)$, definiert durch $f(x) := \frac{x}{1+x}$. Direktes Nachrechnen bestätigt sofort (siehe Teilklausur 1, Ana I), daß f *streng* monoton wachsend ist und daher nur für $x = 0$ den Wert 0 annimmt. Also gilt: $b(x, y) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Die Symmetrie $b(x, y) = b(y, x)$ ergibt sich unmittelbar aus der Symmetrie von d.
Nachweis des dritten Axioms (Dreiecksungleichung):

$$\begin{aligned} b(x, z) &= \tfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \\ &\leq \tfrac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} = \tfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \tfrac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \tfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \tfrac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = b(x, y) + b(y, z) \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile wurde die Dreiecksungleichung für d sowie die (strenge) Monotonie von f ausgenutzt. Beim Übergang zur letzten Zeile wurde der auseindergezogene Bruch durch Verkleineren der Nenner (Wegstreichen jeweils eines Terms) vergrößert. Somit erfüllt b alle Axiome (Eigenschaften) einer Metrik.

Name: ______________________ **Matr.–Nr.:** ______________________ **Punkte:** $\boxed{}$

Aufgabe 3: Ein paar Fragen

Die Antworten sind wie immer mathematisch zu begründen.

a) Betrachten Sie das folgende Polynom in zwei Variablen: $p(x,y) := 3x^4 + 5y^2 - 2xy + 3$. Ist die Menge aller Punkte (x,y), für die $p(x,y)$ echt größer als Null ist,

i) offen, ii) abgeschlossen, iii) weder offen noch abgeschlossen?

b) (entfällt) Ist $q(x,y) := \max\{p(x,y), 0\}$ stetig?

c) Es sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x + 6y \\ -4y + 8x \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $M := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0\ \wedge\ y \geq 0\}$. Ist T stetig? Welche der folgenden Eigenschaften hat $T(M)$: abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt, konvex?

Lösung: Ein wesentliches Ziel der Aufgabe besteht darin, Aussagen über konkrete Beispiele unter Anwendung allgemeiner Sätze zu begründen; es sollte also so wenig wie möglich für den Spezialfall gerechnet werden.

a) Die Menge ist offen, da p als Polynom *stetig* ist und Urbilder offener Mengen bei stetigen Funktionen offen sind. Da $(0,\infty)$ offen in $\mathbb{R}$ ist, ist insbesondere ist also das Urbild $p^{-1}\big((0,\infty)\big) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x,y) > 0\}$ offen.

   Bemerkung: Falls $p(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so entspricht die betrachtete Menge gerade dem $\mathbb{R}^2$, welcher offen und abgeschlossen ist. Der Nachweis von $p(x,y) > 0$ erfordert aber eine genaue Untersuchung des Polynoms, Berechnung der Extremstellen etc..

b) Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := \frac{z+|z|}{2}$ ist stetig als Linearkombination stetiger Funktionen (Identität und Absolutbetrag). Es ist $q = h \circ p$ stetig als Verkettung stetiger Funktionen.

c) T läßt sich als lineare Abbildung darstellen.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Da die Determinante der Matrix nicht verschwindet, besitzt T eine (stetige) Umkehrfunktion.

   Aus der Unbeschränktheit von M sowie der Linearität und Bijektivität von T folgt, daß auch $T(M)$ unebschränkt ist. (Der Kern von T ist wegen der Invertierbarkeit trivial, also $T(M) \neq \{0\}$. Dann muß aber $T(M)$ unbeschränkt sein.) Nach dem Satz von Heine-Borel kann $T(M)$ nicht kompakt sein.

   Aus der Linearität von T ergibt sich mittels Standardabschätzung die Lipschitz-Stetigkeit. Nun bilden stetige Abbildungen *zusammenhängende* Mengen auf eben solche ab. Also ist $T(M)$ zusammenhängend.

   $T(M)$ ist abgeschlossen, denn die Umkehrabbildung $S := T^{-1}$ existiert und ist ebenfalls linear und stetig. Somit gilt $T(M) = S^{-1}(M)$, also entspricht $T(M)$ dem Urbild von M unter S. Da M abgeschlossen ist und Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen abgeschlossen sind, folgt die Behauptung.

   Allgemein bleibt Konvexität unter linearen Abbildungen erhalten. Zeige dazu: Ist M konvex so gilt: $x, y \in M \quad \Rightarrow \quad \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) \in T(M)$. Aus der Linearität folgt aber:

$$\lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) = \underbrace{T\big(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda)y}_{\in M \text{ da } M \text{ konvex}}\big)}_{\in T(M)}$$

Name: ____________________ **Matr.–Nr.:** ____________________ **Punkte:** ☐

Aufgabe 4: Diskussion einer Koordinatentransformation

Betrachten Sie die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$T : (\theta, \phi) \mapsto \big(X(\theta, \phi), Y(\theta, \phi)\big) = \big(\cosh(\theta)\cos(\phi), \sinh(\theta)\sin(\phi)\big)$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von T. Formulieren Sie eine *hinreichende* Bedingung dafür, daß T lokal eine Koordinatentransformation darstellt. An welchen Stellen ist diese Bedingung nicht erfüllt? (Begründung!)

b) Wie sehen die ϕ-Koordinatenlinien für $\theta > 0$ aus? Geben Sie eine präzise Beschreibung inklusive Skizze. Wie schneiden sich θ- und ϕ-Koordinatenlinien (Angabe der Schnittwinkel).

Lösung:

a) Koordinatentransformation = umkehrbare Abbildung (Eindeutigkeit der Koordinaten). Hinreichende Bedingung für die lokale Umkehrbarkeit nach Satz über die Umkehrfunktion: Ableitung muß (als lineare Abbildung) invertierbar ist. Gesucht: Stellen $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ mit Jacobi-Matrix $J_T(\theta, \phi)$ singulär (d.h. $\det J_T(\theta, \phi) = 0$).

$$J_T(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \partial_\theta X & \partial_\phi X \\ \partial_\theta Y & \partial_\phi Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(\theta)\cos(\phi) & -\cosh(\theta)\sin(\phi) \\ \cosh(\theta)\sin(\phi) & \sinh(\theta)\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Mit den Identitäten $1 = \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)$ sowie $1 = \cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \det J_T(\theta, \phi) &= \sinh^2(\theta)\cos^2(\phi) + \cosh^2(\theta)\sin^2(\phi) \\ &= \sinh^2(\theta)\cos^2(\phi) + \sinh^2(\theta)\sin^2(\phi) - \sinh^2(\theta)\sin^2(\phi) + \cosh^2(\theta)\sin^2(\phi) \\ &= \sinh^2(\theta) + \big[\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta)\big]\sin^2(\phi) \;=\; \sinh^2(\theta) + \sin^2(\phi) \end{aligned}$$

Somit: $\quad \det J_T(\theta, \phi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0 \,\wedge\, \phi \in \pi\mathbb{Z}$

b) Konzentrische Ellipsen mit Mittelpunkt im Ursprung, Hauptachsen auf der x- bzw. y-Koordinatenachse liegend. Länge der großen Halbachse $\cosh(\theta)$ bzw. kleine Halbachse $\sinh(\theta)$ (beachte: $\cosh(\theta) > \sinh(\theta)$).

Senkrechter Schnittwinkel, denn Skalarprodukt der Tangentialvektoren (entsprechen den Spalten von J_T) ist stets 0.

Name: ____________________ **Matr.–Nr.:** ____________________ **Punkte:** ☐

Aufgabe 5: Extremwertaufgabe unter Nebenbedingung

Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y) = x(y-1)$ in der Menge $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösung:

Suche zunächst die kritischen Punkte in Int$D$. Notwendige Bedingung: Gradient muß verschwinden.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 \\ x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,1) \notin \mathrm{Int}D.$$

Es gibt also keine kritischen Stellen im Inneren von D. Extremstellen (Maxima/Minima) müssen auf dem Rand ∂D liegen. Dies führt zu einer Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen – gesucht sind also die Extrema von f auf der Einheitskreislinie.

Lagrange-Funktion F:

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= x(y-1) - \lambda(x^2+y^2-1) \\ \nabla F(x,y,\lambda) &= \big(y-1-2\lambda x,\ x-2\lambda y,\ x^2+y^2-1\big) \stackrel{!}{=} (0,0,0) \end{aligned}$$

Daraus folgt: $\left\{ \begin{array}{rcl|l} x &=& 2\lambda y & \text{2. Gleichung} \\ 1 &=& y - 2\lambda(2\lambda y) & \text{Kombination mit 1. Gleichung} \end{array} \right.$

Also: $y = \frac{1}{1-4\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\lambda}{1-4\lambda^2}$

Mit der dritten Gleichung ergibt sich die Bestimmungsgleichung für λ: $1 = x^2 + y^2 = \frac{4\lambda^2+1}{(1-4\lambda^2)^2}$

Zur Vereinfachung der Rechnung ist es günstig $\mu = 4\lambda^2$ zu setzen. Dann folgt:

$$(1-\mu)^2 = \mu + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - 3\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \in \{0,3\} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \{0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\}$$

"Abklappern" der drei Möglichkeiten für λ:

$$\begin{array}{lll} \lambda = 0 & \Rightarrow (x,y) = (0,1) & f(0,1) = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \Rightarrow (x,y) = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) & f(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}\sqrt{3} \\ \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \Rightarrow (x,y) = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) & f(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \end{array}$$

Also beträgt der minimale Funktionswert $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ und der maximale Funktionswert $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.