Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 25. Apr., SS 07
Abgabe : 02. Mai bis 12 Uhr

Analysis IV

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.0: Begriffsklärungen **(Anregung)**

a) In der Vorlesung wurden *Ringe* und *Algebren* als Mengensysteme mit bestimmten Eigenschaften eingeführt. Inwieweit erfüllen diese Mengensysteme die Axiome der algebraischen Strukturen, welche üblicherweise mit den Begriffen *Ring* und *Algebra* belegt sind?

b) Geben Sie sich eine abstrakte Menge X mit zwei oder drei Teilmengen A, B und C vor. Versuchen Sie alle Elemente der Algebra (des Rings) anzugeben, welche(r) durch A, B bzw. A, B, C erzeugt wird.

Aufgabe 1.1: Mengensystem mit Ringstruktur **(Pflicht)**

Zeigen Sie in Analogie zur Vorlesung, daß die Menge endlicher Vereinigungen paarweise disjunkter Intervalle (linksseitig offen und rechtsseitig abgeschlossen) einen Ring bildet.

Aufgabe 1.2: σ-Algebren unter Abbildungen **(Pflicht)**

Oftmals überträgt man in der Mathematik Strukturen eines gegebenen Raums mittels Abbildungen auf einen anderen Raum. Im folgenden seien X, Y zwei Mengen, von denen genau eine die Struktur eines *Meßraumes* besitzen soll. Läßt sich mittels einer Abbildung $f : X \to Y$ auf der jeweils anderen Menge ebenfalls die Struktur eines Meßraums definieren? Untersuchen Sie die beiden Möglichkeiten, wobei entweder X oder Y als Meßraum mit einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ bzw. $\mathscr{B}$ vorgegeben ist. Betrachten Sie z.B. $f^{-1}(\mathscr{B}) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}\}$.
Hinweis: Unter einem *Meßraum* $(X, \mathscr{A})$ versteht man eine Menge zusammen mit einer σ-Algebra ausgezeichneter Teilmengen.

Aufgabe 1.3: Beispiel einer σ-Algebra **(Pflicht)**

Es sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, daß das folgende Mengensystem

$$\mathcal{S} := \big\{ E \subset X \,\big|\, E \text{ oder } E^c \text{ ist abzählbar} \big\}$$

eine σ-Algebra definiert, welche von den Singlets (einelementige Mengen) erzeugt wird.

Aufgabe 1.4: Explizite Darstellung einer Algebra **(freiwillig)**

Es sei X eine Menge und $\mathscr{M}$ eine Familie von Teilmengen von X, d.h. $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann ist die von $\mathscr{M}$ erzeugte Algebra gegeben durch

$$\Big\{ \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{n} M_{ij} \,\big|\, M_{ij} \in \mathscr{M} \cup \mathscr{M}^c,\ n \in \mathbb{N} \Big\}$$

mit $\mathscr{M}^c := \{M \mid M^c \in \mathscr{M}\}$. Läßt sich eine σ-Algebra in ähnlicher Weise darstellen?