Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 03. Mai, SS 07
Abgabe : 09. Mai bis 12 Uhr

Analysis IV

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1: Ergänzungen zur Vorlesung

a) Rechtfertigen Sie den Begriff "kleinste σ-Algebra".

Es sei $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(X)$ ein Ring über X. Zu dem σ-additiven Inhalt $\mu : \mathscr{R} \to [0, \infty]$ definiert man die folgende Funktion $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ auf der Potenzmenge von X durch

$$\mu^*(S) := \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) \,\middle|\, (R_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{R}, \quad S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right\}, \\ \infty \quad \text{falls } S \text{ nicht durch Mengen aus } \mathscr{R} \text{ überdeckt werden kann.} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, daß μ^* ein äußeres Maß definiert (Definition siehe Vorlesung). Insbesondere ist zu zeigen:

   i) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ falls $A \subset B$.

   ii) $\mu^*\big(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ für alle Mengenfolgen.

c) Zeigen Sie, daß die in $\mathscr{R}$ enthaltenen Teilmengen von X *meßbar* sind bezüglich des von μ erzeugten äußeren Maßes.

   Erinnerung: Eine Menge $S \subset X$ ist *meßbar* bezüglich μ^*, falls $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap S) + \mu^*(T \cap S^c)$ für alle $T \subset X$.

Aufgabe 2.2: Verschiedenes

a) Lassen sich Maße definieren, welche angeben, wieviele Elemente in einer Menge enthalten sind (Zählmaß) oder ob eine Menge ein bestimmtes fixiertes Element enthält?

b) Es sei $(X, \mathscr{S}, \mu)$ ein *σ-endlicher* Maßraum mit $\mu(X) = \infty$. Gibt es für jedes $M > 0$ eine Menge $S \in \mathscr{S}$ mit $M < \mu(\mathscr{S}) < \infty$? Die Antwort ist zu begründen.

c) Weisen Sie die folgende Gleichheit für ein äußeres Maß μ auf X, eine Nullmenge $N \subset X$ und eine beliebige Menge $A \subset X$ nach:

$$\mu(A) = \mu(A \cup N) = \mu(A \setminus N).$$

Aufgabe 2.3: Zum Begriff der σ-Algebra

Bei weitem nicht alle σ-Algebren lassen sich so leicht überschauen wie im Beispiel von Aufgabe 1.3. Im Unterschied zu Algebren sind σ-Algebren oftmals viel schwieriger zu erfassen, was auch die folgenden beiden Aussagen belegen mögen. Bearbeiten Sie zunächst Aufgabe 1.4 (falls sie dies noch nicht getan haben), und versuchen Sie a) und b) zu beweisen.

a) Jede unendliche σ-Algebra enthält überabzählbar viele Mengen.

b) (freiwillig) Es sei $\mathscr{E}$ eine Familie von überabzählbar vielen Teilmengen aus X. Jedes Element der von $\mathscr{E}$ erzeugten σ-Algebra ist in einer σ-Algebra enthalten, welche von abzählbar vielen Mengen aus $\mathscr{E}$ erzeugt wird.