Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 24. Mai, SS 07
Abgabe : 30. Mai bis 12 Uhr

Analysis IV

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1: Einige Eigenschaften meßbarer Funktionen

Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Begründen Sie:

a) Damit die Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *meßbar* ist, ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend: $f^{-1}(O)$ ist meßbar für alle *offenen* Mengen $O \subset \mathbb{R}$; ferner sind $f^{-1}(-\infty)$ und $f^{-1}(\infty)$ meßbar.

b) Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ meßbare Funktionen. Dann sind die Mengen $\{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$, $\{x \in X : \ f(x) \geq g(x)\}$ und $\{x \in X : \ f(x) > g(x)\}$ meßbar.

c) Die Menge aller Punkte, in denen eine Folge meßbarer Funktionen konvergiert, ist meßbar.

d) Es gelte zusätzlich $\mu(X) < \infty$. Nimmt die meßbare Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ fast überall endliche Werte an, dann ist gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $M > 0$, so daß $\mu\big(\{x : \ |f(x)| > M\}\big) < \epsilon$. Wie läßt sich diese Aussage mit Blick auf Aufgabe 4.2 griffig zusammenfassen?

Aufgabe 4.2: Punktweise Konvergenz fast überall $\Rightarrow$ beinahe gleichmäßige Konvergenz

Beweisen Sie die folgende Aussage: Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem endlichen Maß, d.h. $\mu(X) < \infty$. Dann sind für eine Folge $(f_n)_n$ von endlich-wertigen, meßbaren Funktionen nachstehende Eigenschaften äquivalent:

i) $\exists\, N \subset X,\ \mu(N) = 0 : \ \ \forall\, x \in X \setminus N : \ \ \big(f_n(x)\big)_n$ konvergiert,

ii) $\forall\, \epsilon > 0 : \ \ \exists\, E \in \mathscr{A},\ \mu(E) < \epsilon : \ \ (f_n\big|_{X \setminus E})_n$ konvergiert gleichmäßig.

Aufgabe 4.3: Absolut stetige Maße

a) In der Vorlesung war bereits die Rede davon, daß sich mittels meßbarer, nicht-negativer Funktionen in dem Maßraum $(X, \mathscr{A}, \mu)$ neue Maße erzeugen lassen. Es bezeichne ν_f das von der Funktion f induzierte Maß. Weisen Sie folgende Identität für zwei geeignete Funktionen f, g nach:

$$\int_M g \,\mathrm{d}\nu_f = \int_M f g \,\mathrm{d}\mu = \int_M f \,\mathrm{d}\nu_g \qquad M \in \mathscr{A}\,.$$

b) In einem Maßraum $(X, \mathscr{A})$ werden zwei Maße μ und ν betrachtet. Ist jede Nullmenge bezüglich μ auch eine Nullmenge bezüglich ν, so heißt ν *absolut-stetig* bezüglich μ (Schreibweise: $\nu \ll \mu$). Ist ν ein endliches Maß, so zeige man:

$$\nu \ll \mu \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, \epsilon > 0 : \ \ \exists\, \delta > 0 : \forall A \in \mathscr{A} : \quad \mu(A) < \delta \ \Rightarrow \ \nu(A) < \epsilon.$$

Geben Sie konkrete Beispiele absolut stetiger Maße an.

Von Aufgabe 4.1c) bzw. 4.1d) brauchen Sie nur diejenige zu bearbeiten, welche Ihnen angenehmer erscheint. Da trotz zweiwöchiger Bearbeitungszeit für das letzte Blatt die Aufgaben 3.3d), 3.3e) und 3.3f) kaum beachtet worden sind, sollten Sie sich mit derjenigen Aufgabe auseinander setzen, welche Sie von diesen dreien am meisten herausfordert.