Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 31. Mai, SS 07
Abgabe : 13. Jun. bis 12 Uhr

Analysis IV

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1: Übungen zur Vorlesung

a) Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die beiden Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ stimmen fast überall überein. Ist mit f auch g meßbar?

b) Es sei $(f_n)_n$ eine monotone Folge integrierbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \quad ?$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5.2: Riemann contra Lebesgue

a) Interpretieren Sie das folgende Integral im Riemannschen bzw. Lebesgueschen Sinne:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x \,.$$

Diskutieren Sie die jeweilige Existenz des Integrals.

b) Berechnen Sie das obige Integral, indem Sie für $t \geq 0$ die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$$

nachweisen. Die Rechenschritte sollten durch Hinweise auf verwendete Sätze untermauert werden.

Aufgabe 5.3: Anwendung der Konvergenzsätze

Können Sie die Grenzwerte der folgenden Integrale

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{x/2} \,\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x$$

für $n \to \infty$ erraten? Begründen Sie Ihre Vermutung.